

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Sea la función definida de la forma $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 - 10x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- a) Halle el dominio de f .
b) Estudie la derivabilidad de f en $x = 2$.
c) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.
SOCIALES II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Dominio $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) Estudiamos primero la continuidad en $x = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x-1} = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x^2 - 10x) = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow \text{No es continua en } x = 2, \text{ por lo tanto, no es}$$

derivable en $x = 2$

c) La recta tangente en $x = 0$ es $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(0) = -2 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - 0 = -2 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -2x$

Sea la función f definida mediante $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 1 \\ L(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Determine a y b sabiendo que f es continua y tiene un mínimo en $x = -1$.

b) Para $a = -1$ y $b = 1$, estudie la derivabilidad de f en $x = -1$ y en $x = 1$.

SOCIALES II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Por ser continua se cumple:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + ax + b = 1 + a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} L(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1$$

mínimo en $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow -2 + a = 0$

Resolviendo, tenemos que: $a = 2$; $b = -3$

b) La función que tenemos es: $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x < 1 \\ L(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Estudiamos primero la continuidad en $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} L(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 \neq 0 \Rightarrow \text{No es continua, por lo tanto, tampoco es derivable.}$$

Como la función que tenemos en $x = -1$ es polinómica, la función es continua y derivable en $x = -1$.

Sea la función f definida mediante $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$

- a) Determine los puntos de corte con los ejes.
b) Estudie su curvatura.
c) Determine sus asíntotas.
d) Represente la función.

SOCIALES II. 2008 RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Corte con el eje X $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow \frac{x+1}{2x-1} = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1, 0)$

Corte con el eje Y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow (0, -1)$

b) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (2x-1) - 2 \cdot (x+1)}{(2x-1)^2} = \frac{-3}{(2x-1)^2} = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
Signo f'	-	-
Función	D	D

Luego la función es decreciente en su dominio.

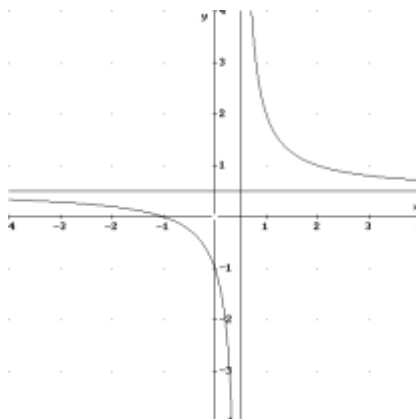
c) *Verticales*: La recta $x = a$ es una asíntota vertical si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \infty \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Horizontales: La recta $y = b$ es una asíntota horizontal si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Oblicuas: No tiene.



a) La gráfica de la derivada de una función f es la recta que pasa por los puntos $(0, -3)$ y $(4, 0)$.

Estudie la monotonía de la función f

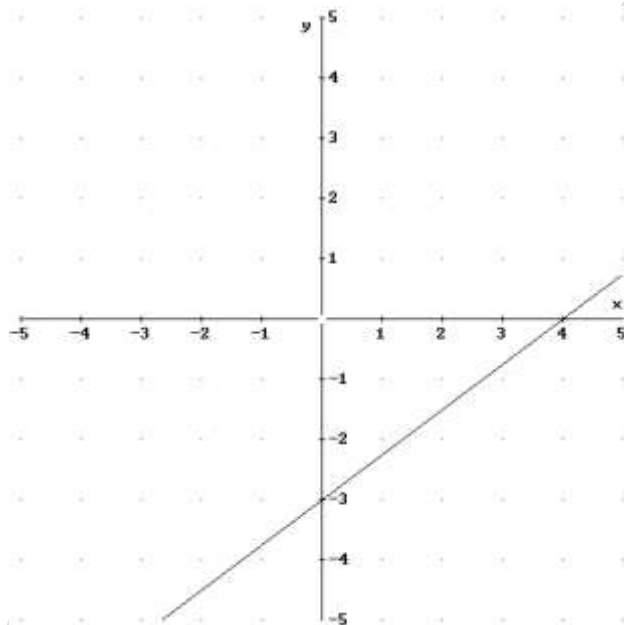
b) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x) = (3x+1)^3 \cdot \ln(x^2+1) \quad ; \quad h(x) = \frac{e^x}{7x^5-4}$$

SOCIALES II. 2008 RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

RESOLUCIÓN

a) Hacemos la representación gráfica de la función derivada.



Vemos que $f'(x)$ es positiva en el intervalo $(4, \infty)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será creciente.

Vemos que $f'(x)$ es negativa en el intervalo $(-\infty, 4)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será decreciente.

b)

$$g'(x) = 3 \cdot (3x+1)^2 \cdot 3 \cdot \ln(x^2+1) + \frac{2x}{x^2+1} (3x+1)^3$$

$$h'(x) = \frac{e^x(7x^5-4) - 35x^4 \cdot e^x}{(7x^5-4)^2}$$

El beneficio de una empresa, en miles de euros, viene dado por la función

$$B(x) = -3x^2 + 120x + 675 \quad ; \quad x \geq 0$$

donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

- Calcule el gasto a partir del cual la empresa no obtiene beneficios.
- Calcule el valor de x que produce máximo beneficio. ¿Cuánto es ese beneficio?
- Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio de la empresa.
- Represente gráficamente la función B .

SOCIALES II. 2008 RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos la ecuación

$$0 = -3x^2 + 120x + 675 \Rightarrow x = 45$$

Luego, a partir de 45.000 € no obtiene beneficios.

b) El vértice es $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{120}{-6} = 20$

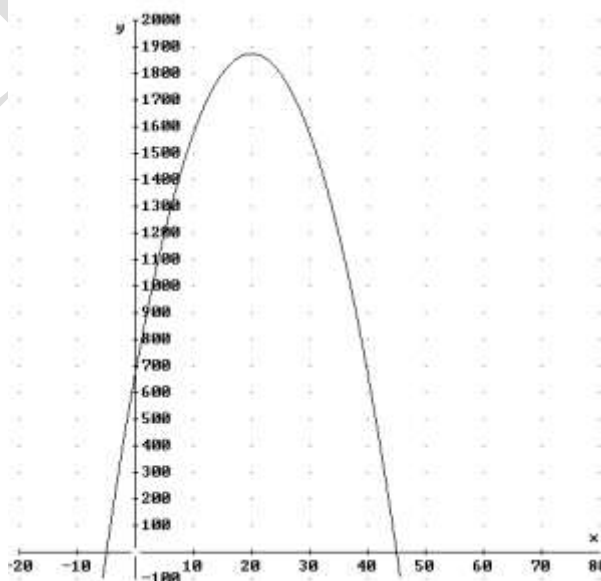
Luego, el máximo beneficio se obtiene para $x = 20.000$ €

c) Calculamos la derivada de la función:

$$B'(x) = -6x + 120 \quad ; \quad B'(x) = 0 \Rightarrow -6x + 120 = 0 \Rightarrow x = 20$$

	$(0,20)$	$(20,\infty)$
Signo $B'(x)$	+	-
Función $B(x)$	C	D

d)



Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x^3 + 1) \cdot e^{7x}$

b) $g(x) = 3^x \cdot \ln(x)$

c) $h(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^5 - 6x)^6$

d) $i(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 - 2}$

SOCIALES II. 2008 RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $f'(x) = 3x^2 \cdot e^{7x} + 7 \cdot e^{7x} \cdot (x^3 + 1)$

b) $g'(x) = 3^x \cdot \ln 3 \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot 3^x$

c) $h'(x) = 2x \cdot (x^5 - 6x)^6 + 6 \cdot (x^5 - 6x)^5 (5x^4 - 6)(x^2 + 1)$

d) $i'(x) = \frac{2 \cdot (x+1) \cdot (x^2 - 2) - 2x \cdot (x+1)^2}{(x^2 - 2)^2}$

Sea la función $f(x) = x^3 - 6x^2$.

- a) Determine sus puntos de corte con los ejes.
 b) Calcule sus extremos relativos y su punto de inflexión.
 c) Represente gráficamente la función.
SOCIALES II. 2008 RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

Corte con el eje X $\Rightarrow x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 6 \Rightarrow (0,0) ; (6,0)$

Corte con el eje Y $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 4$$

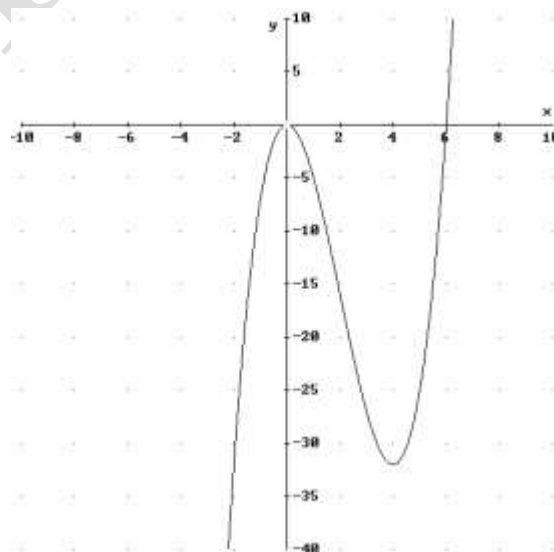
	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
Signo y'	+	-	+
Función	C	D	C

\downarrow \downarrow
 Máximo $(0,0)$ mínimo $(4,-32)$

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{El punto de inflexión está en } (2, -16)$$

c) Hacemos la representación gráfica.



Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Calcule a y b , sabiendo que $f(2) = 7$ y que f es continua en $x = 1$.

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

SOCIALES II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 4 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b \end{array} \right\} \Rightarrow 5 = a + b$$

$$f(2) = 7 \Rightarrow 2a + b = 7$$

Resolviendo el sistema sale: $a = 2$; $b = 3$

b) La recta tangente en $x = -1$ es $y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1)$

$$f(-1) = 5$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(-1) = -2$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - 5 = -2 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = -2x + 3$

Sea la función $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

- a) ¿Es f continua en $x = 0$? ¿Es continua en su dominio?
 b) ¿Es f derivable en $x = 0$? ¿Es derivable en su dominio?
 c) Estudie la monotonía de f .

SOCIALES II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + x + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow \text{Es continua en } x = 0$$

La función es continua en su dominio, ya que e^x y $x^2 + x + 1$ son continuas.

b) Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow \text{Es derivable en } x = 0$$

La función es derivable en su dominio, ya que e^x y $x^2 + x + 1$ son derivables.

c)

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow e^x = 0 \Rightarrow \text{No} ; 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{No}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Signo y'	+	+
Función	C	C

- a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$ en el punto de abscisa 1.
- b) Sea la función $g(x) = x^3 + ax^2 + b$. Calcule a y b sabiendo que su gráfica presenta un punto de inflexión en el punto (2,5).
- SOCIALES II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=1$ es $y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1)$

$$f(1) = 2$$

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2} \Rightarrow f'(1) = -2$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - 2 = -2 \cdot (x-1) \Rightarrow y = -2x + 4$

b)

- Pasa por (2,5) $\Rightarrow f(2) = 5 \Rightarrow 8 + 4a + b = 5 \Rightarrow 4a + b = -3$

- Punto de inflexión en $x = 2 \Rightarrow f''(2) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 2 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -12$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $a = -6$; $b = 21$

a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{3}{x}$ en el punto de abscisa $x = -1$.

b) Halle los valores de a y b para que la función $g(x) = ax + \frac{b}{x}$ tenga un extremo relativo en el punto $(1, 2)$.

SOCIALES II. 2008 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x = -1$ es $y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1)$

$$f(-1) = -3$$

$$f'(x) = \frac{-3}{x^2} \Rightarrow f'(-1) = -3$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y + 3 = -3 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = -3x - 6$

b)

- Extremo relativo en $x = 1 \Rightarrow g'(1) = 0 \Rightarrow a - \frac{b}{1^2} = 0 \Rightarrow a - b = 0$

- Pasa por $(1, 2) \Rightarrow g(1) = 2 \Rightarrow a + b = 2$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $a = 1$; $b = 1$

Dada la función $f(x) = 4 - 3x^2 + x^3$, determine:

- a) La monotonía y la curvatura de f .
- b) Los puntos donde la función alcanza sus extremos relativos.
- c) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

SOCIALES II. 2008 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a y b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 2$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Signo f'	+	-	+
Función	C	D	C

\downarrow \downarrow
 Máximo $(0, 4)$ mínimo $(2, 0)$

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
Signo f''	-	+
Función	Cn	Cx

\downarrow
P.I. $(1, 2)$

c) La recta tangente en $x = -1$ es $y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1)$

$$f(-1) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(-1) = 9$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y + 0 = 9 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = 9x + 9$