

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

La función de beneficios  $f$ , en miles de euros, de una empresa depende de la cantidad invertida  $x$ , en miles de euros, en un determinado proyecto de innovación y viene dada por

$$f(x) = -2x^2 + 36x + 138 \quad x \geq 0$$

- a) Determine la inversión que maximiza el beneficio de la empresa y calcule dicho beneficio óptimo.  
 b) Calcule  $f'(7)$  e interprete el signo del resultado.  
 c) Dibuje la función de beneficios  $f(x)$ . ¿Para qué valor o valores de la inversión,  $x$ , el beneficio es de 138 mil euros?.

**SOCIALES II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

### R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:  $f'(x) = -4x + 36 = 0 \Rightarrow x = 9$

	$(0, 9)$	$(9, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-
Función	C	D

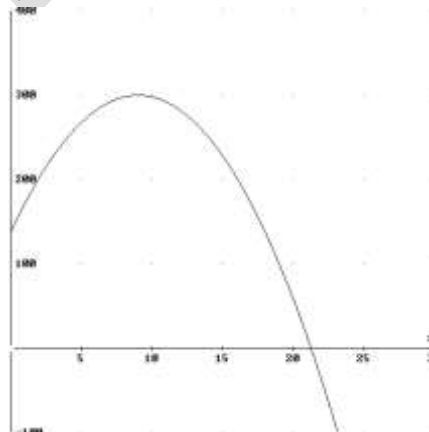
La función es creciente en el intervalo:  $(0, 9)$  y decreciente en el intervalo:  $(9, +\infty)$ .

Tiene un máximo relativo en el punto  $(9, 300)$

Luego, la inversión que maximiza el beneficio es  $x = 9$  mil € y el beneficio óptimo es  $f(9) = 300$  mil €.

- b)  $f'(7) = -4 \cdot 7 + 36 = 8 > 0$ . Al ser positivo el valor de la derivada de esta función en ese punto, nos indica que la función es creciente en dicho punto.

- c) Hacemos el dibujo de la función:



Calculamos para que valores de  $x$  el beneficio es de 138 mil €.

$$f(x) = -2x^2 + 36x + 138 = 138 \Rightarrow -2x^2 + 36x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 18$$

Luego, se obtiene un beneficio de 138 mil € con una inversión de 0 mil € y 18 mil €.

Sea la función  $f$  definida por  $f(x) = \begin{cases} -bx^2 - bx + a & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{60}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Obtenga los valores de  $a$  y  $b$  para que la función sea continua y derivable.

b) Para  $a = 48$  y  $b = 3$ , estudie la monotonía de  $f(x)$  y calcule sus extremos.

**SOCIALES II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

a) La función polinómica  $-bx^2 - bx + a$  es continua y derivable en  $\mathbb{R}$ . La función racional  $\frac{60}{x}$  es continua y derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$ . Por lo tanto, sólo debemos estudiar la continuidad y derivabilidad en  $x = 2$ .

Estudiamos la continuidad en  $x = 2$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} -bx^2 - bx + a = -4b - 2b + a = -6b + a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{60}{x} = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow -6b + a = 30$$

Estudiamos la derivabilidad en  $x = 2$

Calculamos la función derivada:  $f'(x) = \begin{cases} -2bx - b & \text{si } x \leq 2 \\ -\frac{60}{x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = -4b - b = -5b \\ f'(2^+) = -\frac{60}{4} = -15 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow -5b = -15$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas, tenemos que:  $a = 48$  y  $b = 3$

b) Calculamos la función derivada y la igualamos a cero:  $f'(x) = \begin{cases} -6x - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ -\frac{60}{x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$-6x - 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	-
Función	C	D	D

La función es creciente en el intervalo:  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$  y decreciente en el intervalo:  $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ .

Tiene un máximo relativo en el punto  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{195}{4}\right)$

Sea la función  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ .

- a) Estudie la monotonía de  $f$  y halle los extremos relativos que posea.  
 b) Estudie su curvatura y calcule su punto de inflexión.  
 c) Represente la gráfica de la función  $f$ .

**SOCIALES II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:  $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	+
Función	C	C

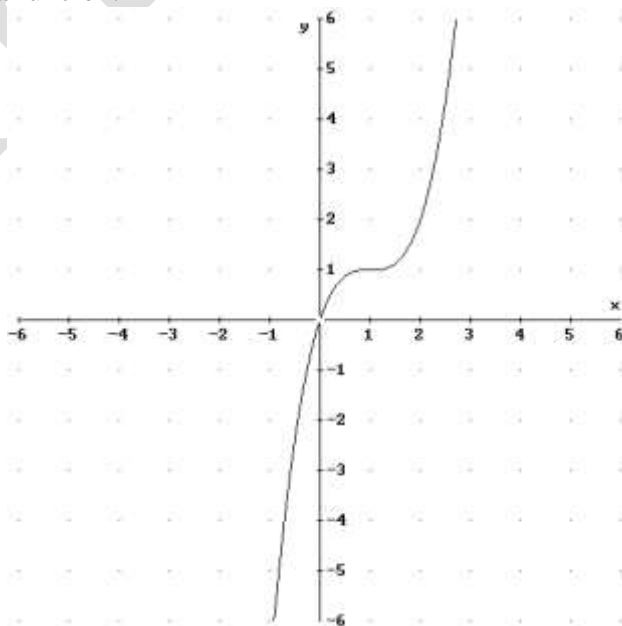
La función es creciente en el intervalo:  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ . Por lo tanto, la función no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:  $f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f''(x)$	-	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en el intervalo:  $(-\infty, 1)$  y convexa en el intervalo  $(1, +\infty)$ . Por lo tanto, tiene un punto de inflexión en  $(1, 1)$ .

c) Hacemos el dibujo de la función:



Sea la función  $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función en su dominio  
 b) Determine sus asíntotas, en caso de que existan.  
 c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 2$ .  
**SOCIALES II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

a) La función racional  $\frac{4}{x}$  es continua y derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$ . La función polinómica  $(x+1)^2$  es continua y derivable en  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y la derivabilidad en  $x=1$ .

Estudiamos la continuidad en  $x=1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1)^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{x} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \text{Es continua en } x=1$$

Estudiamos la derivabilidad en  $x=1$

Calculamos la función derivada:  $f'(x) = \begin{cases} 2(x+1) & \text{si } x < 1 \\ -\frac{4}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$  y como:

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = 4 \\ f'(1^+) = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x=1$$

Por lo tanto, la función es continua en  $\mathbb{R}$  y derivable en  $\mathbb{R} - \{1\}$ .

b) La función polinómica  $(x+1)^2$  no tiene asíntotas. La función racional  $\frac{4}{x}$  tiene una asíntota vertical en  $x=0$ , pero no está en su dominio. Además tiene una asíntota horizontal  $y=0$ , ya que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = \frac{4}{\infty} = 0$$

c) La recta tangente en  $x=2$ , es:  $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$ .

$$\begin{array}{l} - f(2) = 2 \\ - f'(2) = -1 \end{array}$$

Sustituyendo, tenemos:  $y - 2 = -1 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -x + 4$

Sea la función  $f(x) = -2x^3 + a \cdot e^{-x} + bx - 1$

a) Halle los valores de  $a$  y  $b$  sabiendo que la función tiene un mínimo en  $x = 0$  y que la gráfica de la función pasa por el punto  $(0, 0)$ .

b) Para  $a = 0$  y  $b = 1$ , determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa  $x = -1$ .

**SOCIALES II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de  $f(x) = -2x^3 + a \cdot e^{-x} + bx - 1$ .

$$f'(x) = -6x^2 - a \cdot e^{-x} + b$$

$$\text{Pasa por } (0,0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow a - 1 = 0$$

$$\text{Mínimo en } x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow -a + b = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones sale:  $a = 1$  ;  $b = 1$

b) La recta tangente en  $x = -1$  es  $y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1)$

$$f(-1) = 0$$

$$f'(-1) = -5$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos,  $y - 0 = -5 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = -5x - 5$

Sea la función  $f$ , definida por  $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 5 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ .

Determine los valores que han de tomar  $a$  y  $b$  para que la función  $f$  sea derivable en  $x = 0$   
**SOCIALES II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

Como la función es derivable en  $x = 0$ , tiene que ser continua en ese punto, luego:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - ax + 5) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + b) = b \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow b = 5$$

Calculamos la función derivada:  $f'(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{si } x < 0 \\ -2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Como la función es derivable en  $x = 0$ ,

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = -a \\ f'(0^+) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow a = 0$$

Luego, los valores son:  $a = 0$  ;  $b = 5$

Sea la función dada por  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x+b}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ .

a) Determine los valores de  $a$  y  $b$ , sabiendo que dicha función es derivable.

b) Para  $a = 2$  y  $b = 3$ , determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .

**SOCIALES II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

### R E S O L U C I Ó N

a) La función racional  $\frac{x+b}{x-1}$  es continua y derivable en  $\mathbb{R} - \{1\}$ . La función polinómica  $x^2 + ax$  es continua y derivable en  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y la derivabilidad en  $x = 2$ .

Estudiamos la continuidad en  $x = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + ax) = 4 + 2a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+b}{x-1} = 2+b \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 4 + 2a = 2 + b \Rightarrow 2a - b = -2$$

Estudiamos la derivabilidad en  $x = 2$

Calculamos la función derivada:  $f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{-1-b}{(x-1)^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$  y como es derivable, entonces:

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = 4 + a \\ f'(2^+) = -1 - b \end{array} \right\} \Rightarrow f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow 4 + a = -1 - b \Rightarrow a + b = -5$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que:  $a = -\frac{7}{3}$ ;  $b = -\frac{8}{3}$

b) La recta tangente en  $x = 1$ , es:  $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$ .

$$- f(1) = 3$$

$$- f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(1) = 4$$

Sustituyendo, tenemos:  $y - 3 = 4 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 4x - 1$



El porcentaje de personas que sintonizan un programa de radio que se emite entre las 6 y las 12 horas viene dado, según la hora  $t$ , mediante la función

$$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3 \quad 6 \leq t \leq 12$$

- a) ¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa al comenzar la emisión? ¿Y al cierre?  
b) ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia? ¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa a dichas horas?

**SOCIALES II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

a)  $S(6) = 660 - 231 \cdot 6 + 27 \cdot 6^2 - 6^3 = 30$ . Luego, sintonizan un 30 % de personas al comenzar la emisión.

$S(12) = 660 - 231 \cdot 12 + 27 \cdot 12^2 - 12^3 = 48$ . Luego, sintonizan un 48 % de personas al cierre de la emisión.

b) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$S'(t) = -231 + 54t - 3t^2 = 0 \Rightarrow t = 7 ; t = 11$$

Calculamos los valores de  $S(t)$ , para 6,7,11 y 12.

$$S(6) = 30 ; S(7) = 23 ; S(11) = 55 ; S(12) = 48$$

Luego, vemos que el máximo de audiencia es del 55% y se alcanza a las 11 horas. El mínimo de audiencia es del 23% y se alcanza a las 7 horas.

Sean las funciones:  $f(x) = (2x^2 - 1)^3 \ln(x^4)$  y  $g(x) = \frac{e^{-2x+x^2}}{x^2+1}$

Determine el valor de  $f'(-1)$  y de  $g'(0)$

**SOCIALES II. 2014 RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

### R E S O L U C I Ó N

$$f'(x) = 3 \cdot (2x^2 - 1)^2 \cdot 4x \cdot \ln(x^4) + \frac{4x^3}{x^4} \cdot (2x^2 - 1)^3 \Rightarrow f'(-1) = 0 + \frac{-4}{1} \cdot 1^3 = -4$$

$$g'(x) = \frac{(-2+2x) \cdot e^{-2x+x^2} \cdot (x^2+1) - 2x \cdot e^{-2x+x^2}}{(x^2+1)^2} \Rightarrow g'(0) = \frac{-2 \cdot 1}{1} = -2$$

**Represente gráficamente la función  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$ , estudiando previamente su dominio, puntos de corte con los ejes, intervalos de monotonía, extremos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.**

**SOCIALES II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

Dominio: como es una función polinómica su dominio es  $\mathbb{R}$ .

Corte con el eje X:  $y = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x = 0$ . Luego, corta en el punto  $(0, 0)$ .

Corte con el eje Y:  $x = 0 \Rightarrow y = 0$ . Luego, corta en el punto  $(0, 0)$ .

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	+
Función	C	C

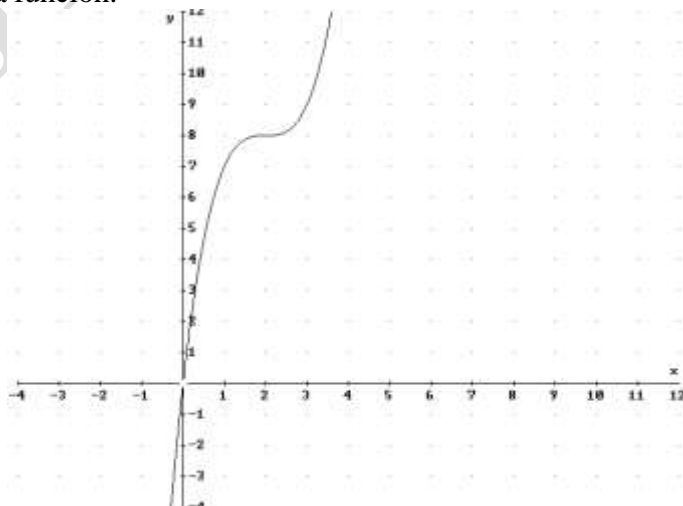
La función es creciente en el intervalo:  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ . Por lo tanto, la función no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:  $f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f''(x)$	-	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en el intervalo:  $(-\infty, 2)$  y convexa en el intervalo  $(2, +\infty)$ . Por lo tanto, tiene un punto de inflexión en  $(2, 8)$ .

Hacemos el dibujo de la función:



Una empresa ha realizado un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, que ha obtenido en los últimos 10 años. La función a la que se ajustan dichos beneficios viene dada por  $B(t) = 2t^3 - 36t^2 + 162t - 6$ , con  $0 \leq t \leq 10$ .

a) ¿Qué beneficios obtuvo al inicio del periodo ( $t = 0$ ) y al final del décimo año ( $t = 10$ ) .

b) ¿En qué momentos se obtiene el máximo y el mínimo beneficio y cuáles fueron sus cuantías?

**SOCIALES II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

### R E S O L U C I Ó N

a)  $B(0) = -6$ . Luego, para  $t = 0$  ha tenido unas pérdidas de 6.000 €.

$B(10) = 14$ . Luego, para  $t = 10$  ha tenido unas ganancias de 14.000 €.

b) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$B'(t) = 6t^2 - 72t + 162 = 0 \Rightarrow t = 3 ; t = 9$$

Calculamos los valores de  $B(t)$ , para 0,3,9 y 10.

$$B(0) = -6 ; B(3) = 210 ; B(9) = -6 ; B(10) = 14$$

Luego, vemos que el máximo beneficio es de 210.000 € y se alcanza para  $t = 3$ . El mínimo beneficio es de -6.000 € y se alcanza para  $t = 0$  y  $t = 9$ .

Sea la función  $f(x) = -x^2 + px + q$

a) Calcule los valores que deben tener  $p$  y  $q$  para que la gráfica de la función  $f$  pase por el punto  $(-4, -5)$  y presente un máximo en el punto de abscisa  $x = -1$ . Determine el valor de  $f(x)$  en ese punto.

b) Represente la gráfica de  $f$  para  $p = 2$  y  $q = -1$  y halle la ecuación de la recta tangente a esta gráfica en el punto de abscisa  $x = -2$ .

**SOCIALES II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función:  $f'(x) = -2x + p$  y aplicamos los datos del problema:

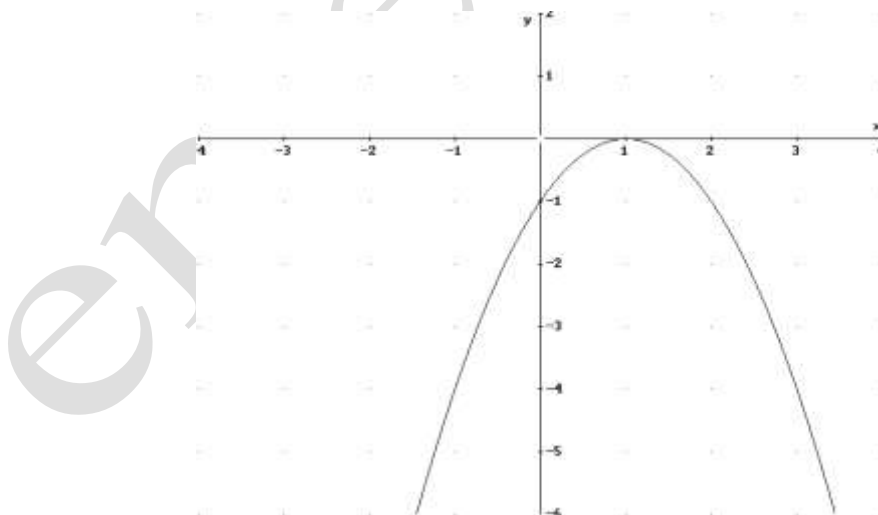
$$\text{- Pasa por } (-4, -5) \Rightarrow -5 = -16 - 4p + q \Rightarrow 4p - q = -11$$

$$\text{- Máximo en } x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow 2 + p = 0 \Rightarrow p = -2$$

Sustituyendo en la otra ecuación tenemos que:  $-8 - q = -11 \Rightarrow q = 3$

El valor de  $f(x)$  en ese punto es:  $f(-1) = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3 = 4$

b) Representamos la función para  $p = 2$  y  $q = -1$ .



Calculamos la recta tangente en  $x = -2$

$$f(-2) = -(-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 1 = -9$$

$$f'(x) = -2x + 2 \Rightarrow f'(-2) = -2 \cdot (-2) + 2 = 6$$

$$y - f(-2) = f'(-2) \cdot (x + 2) \Rightarrow y + 9 = 6(x + 2) \Rightarrow y = 6x + 3$$