EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

Se considera la función $f(x) = x^3 - 9x + 2$

a) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función que sean paralelas a la recta $y = 3x - 3$

b) Estudie la monotonía y la curvatura de la función f

c) Calcule $\int f(x)\,dx$

SOCIALES II. 2019 JUNIO EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Como tiene que ser paralela a la recta $y = 3x - 3$, la pendiente vale 3, luego: $f'(x) = 3$

$$f'(x) = 3 \Rightarrow 3x^2 - 9 = 3 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm 2$$

La ecuación de la tangente en $x = 2$ es: $y - f(2) = f'(2)\cdot(x-2)$

$f(2) = 2^3 - 9\cdot 2 + 2 = -8$ $\qquad$ $f'(2) = 3$

Sustituyendo, tenemos que: $y - f(2) = f'(2)\cdot(x-2) \Rightarrow y + 8 = 3\cdot(x-2) \Rightarrow y = 3x - 14$

La ecuación de la tangente en $x = -2$ es: $y - f(-2) = f'(-2)\cdot(x+2)$

$f(-2) = (-2)^3 - 9\cdot(-2) + 2 = 12$ $\qquad$ $f'(-2) = 3$

Sustituyendo, tenemos que: $y - f(-2) = f'(-2)\cdot(x+2) \Rightarrow y - 12 = 3\cdot(x+2) \Rightarrow y = 3x + 18$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = 3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\right)$	$\left(+\sqrt{3}, +\infty\right)$
Signo $f'(x)$	+	−	+
Función	C	D	C

Creciente: $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(+\sqrt{3}, +\infty\right)$; Decreciente: $\left(-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\right)$

Tiene un máximo relativo en el punto $\left(-\sqrt{3}\,, 6\sqrt{3}+2\right)$ y un mínimo relativo en $\left(\sqrt{3}\,, -6\sqrt{3}+2\right)$.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f''(x)$	−	+
Función	Cn	Cx

Cóncava: $(-\infty, 0)$; Convexa: $(0, +\infty)$; Tiene un punto de inflexión en $(0, 2)$.

c) Calculamos la integral que nos piden:

$$\int (x^3 - 9x + 2)\,dx = \int x^3\,dx - 9\int x\,dx + 2\int dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} + 2x + C$$

Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si \quad x<0 \\ x^2+a & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

a) Determine el valor del parámetro *a* para que *f* sea continua en todo su dominio. Para ese valor de *a*, estudie la derivabilidad de *f*.

b) Para $a=-2$**, estudie la monotonía y curvatura de la función *f*. ¿Tiene algún punto de inflexión?.**

SOCIALES II. 2019. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La función $\dfrac{1}{x-1}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$. La función polinómica x^2+a es continua en $x\geq 0$. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad en $x=0$.

Calculamos *a* para que sea continua en $x=0$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+a)=a \end{array}\right\} \Rightarrow a=-1$

La función que tenemos es: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si \quad x<0 \\ x^2-1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2} & si \quad x<0 \\ 2x & si \quad x>0 \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=-1 \\ f'(0^+)=\ \ 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)\neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x=0$$

Luego, la función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$

b) La función que tenemos es: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si \quad x<0 \\ x^2-2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

Calculamos la derivada e igualamos a cero: $f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2} & si \quad x<0 \\ 2x & si \quad x>0 \end{cases}$

Igualamos la derivada a cero: $2x=0 \Rightarrow x=0$

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$
Función	D	C

La función es creciente en $(0,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,0)$

Calculamos la segunda derivada e igualamos a cero: $f''(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{(x-1)^3} & si \quad x<0 \\ 2 & si \quad x>0 \end{cases}$

No hay ningún valor de x que anule la 2ª derivada, luego:

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
Signo $f''(x)$	$-$	$+$
Función	Cn	Cx

La función es convexa en $(0,+\infty)$ y cóncava en $(-\infty,0)$. No tiene punto de inflexión

a) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{1}{2}\ \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \qquad g(x)=(x^2+1)^2\cdot e^{2x-1}$$

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x)=x^2-6x+8$ en el punto de abscisa $x=4$. Represente gráficamente la función *h* y la recta tangente hallada.
SOCIALES II. 2019 RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{-1\cdot(1+x)-1(1-x)}{(1+x)^2}}{\dfrac{1-x}{1+x}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{(1-x)(1+x)}=\frac{-1}{1-x^2}$$

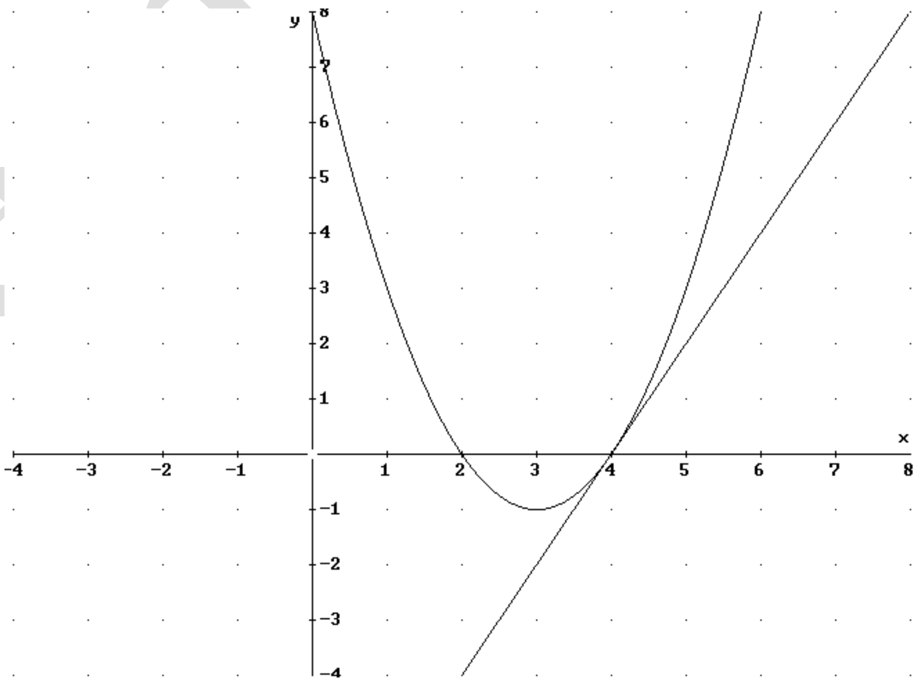
$$g'(x)=2\cdot(x^2+1)\cdot 2x\cdot e^{2x-1}+2\cdot e^{2x-1}\cdot(x^2+1)^2=2\cdot e^{2x-1}\cdot(x^2+1)\cdot\left[2x+(x^2+1)\right]$$

b) La recta tangente en $x=4$ es $y-h(4)=h'(4)\cdot(x-4)$

- $h(4)=16-24+8=0$
- $h'(x)=2x-6\Rightarrow h'(4)=8-6=2$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-0=2\cdot(x-4)\Rightarrow y=2x-8$

Dibujamos la parábola y la recta haciendo una tabla de valores



Se considera la función $f(x)=ax^2+\dfrac{b}{x}$, con $x\neq 0$, siendo a y b dos parámetros reales.

a) Determine el valor de los parámetros a y b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $(1,3)$.

b) Para $a=1$ y $b=2$, razone si en el punto $(1,3)$ la función presenta un máximo o un mínimo.

c) Calcule $\int\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)dx$.

SOCIALES II. 2019 RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a)

- Extremo relativo en $x=1\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow f'(x)=2ax-\dfrac{b}{x^2}\Rightarrow f'(1)=2a-b=0$

- Pasa por $(1,3)\Rightarrow f(1)=3\Rightarrow a+b=3$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $a=1$; $b=2$

b) Calculamos la monotonía de la función $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2x^3-2}{x^2}=0\Rightarrow x=1$$

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	—	—	+
Función	D	D	C

La función es decreciente en $(-\infty,0)\cup(0,1)$ y creciente en $(1,+\infty)$
Tiene un mínimo relativo en $(1,3)$

c) $\int\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)dx=\int x^2\,dx+2\int\dfrac{1}{x}\,dx=\dfrac{x^3}{3}+2\ln|x|+C$

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & si \quad -2\le x<1 \\ ax^2+4x & si \quad 1\le x\le 4 \end{cases}$

a) Calcule el valor de a para que la función sea continua en todo su dominio.
b) Para $a=-1$, compruebe si es derivable en $x=1$.
c) Para $a=-1$, determine los extremos relativos de la función y el valor de la función en dichos extremos.
d) Para $a=-1$, represente gráficamente la función en su dominio.
SOCIALES II. 2019 RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) La función x^2+2x al ser polinomica es continua y derivable en su dominio. La función ax^2+4x al ser polinómica es continua y derivable en su dominio. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad en $x=1$. Como es continua en $x=1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-}\left(x^2+2x\right)=3 \\ \lim_{x\to 1^+}\left(ax^2+4x\right)=a+4 \end{array}\right\} \Rightarrow 3=a+4 \Rightarrow a=-1$$

b) Vamos a estudiar la derivabilidad en $x=1$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & si \quad -2\le x<1 \\ -2x+4 & si \quad 1<x\le 4 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=4 \\ f'(1^+)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)\neq f'(1^+) \Rightarrow \text{ No es derivable en } x=1$$

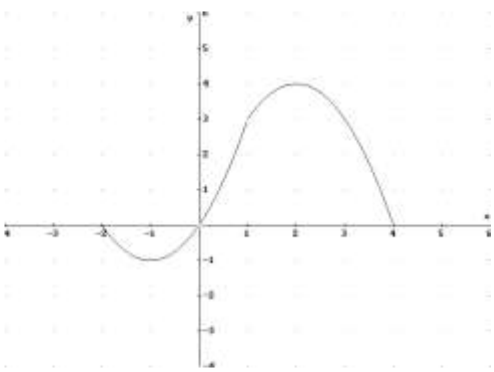
c) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=2x+2=0\Rightarrow x=-1$.
$f'(x)=-2x+4=0\Rightarrow x=2$

	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,2)$	$(2,4)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
Función	D	C	C	D

La función es decreciente en $(-2,-1)\cup(2,4)$ y creciente en $(-1,1)\cup(1,2)$.

Tiene un máximo en $(2,4)$ y un mínimo en $(-1,-1)$.

d)



a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+1 & si \quad x<0 \\ e^{-x} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

b) Dada la función $g(x)=x^3+bx^2+c$, calcule los valores de b y c sabiendo que g tiene un extremo relativo en $x=-1$ y que su gráfica pasa por el punto $(-1,3)$.

SOCIALES II. 2019 RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) La función x^2+4x+1 al ser polinomica es continua y derivable en su dominio y la función exponencial e^{-x} también es continua y derivable en su dominio. Por lo tanto, estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=0$.

1) $f(0)=e^0=1$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+}(e^{-x})=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+4x+1\right)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

3) $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

Luego, es continua en $x=0$ y es continua en su dominio.

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2x+4 & si \quad x<0 \\ -e^{-x} & si \quad x>0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=4 \\ f'(0^+)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)\neq f'(0^+) \Rightarrow \text{ No es derivable en } x=0$$

Luego, la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$

b) Calculamos la derivada de la función $g(x)=x^3+bx^2+c \Rightarrow g'(x)=3x^2+2bx$

- Extremo relativo en $x=-1 \Rightarrow g'(-1)=0 \Rightarrow 3\cdot(-1)^2+2b\cdot(-1)=0 \Rightarrow 3-2b=0 \Rightarrow b=\dfrac{3}{2}$

- Pasa por $(-1,3) \Rightarrow g(-1)=3 \Rightarrow (-1)^3+\dfrac{3}{2}(-1)^2+c=3 \Rightarrow c=\dfrac{5}{2}$

Sea la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$.
a) Halle *a* y *b* de forma que *f* tenga un extremo relativo en $x=1$ y la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=0$ tenga pendiente $m=-1$.
b) Para $a=-1$ y $b=-1$, estudie la monotonía y la curvatura de la función *f*.
SOCIALES II. 2019 RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función: $f'(x)=3x^2+2ax+b$

Extremo relativo en $x=1 \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 3\cdot 1^2+2a\cdot 1+b=0 \Rightarrow 2a+b=-3$

Tangente en $x=0$ pendiente $m=-1 \Rightarrow f'(0)=-1 \Rightarrow 3\cdot 0^2+2a\cdot 0+b=-1 \Rightarrow b=-1$

Luego: $a=-1$; $b=-1$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=3x^2-2x-1=0 \Rightarrow x=1$; $x=-\dfrac{1}{3}$

	$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\frac{1}{3},1\right)$	$(1,\infty)$
Signo $f'(x)$	+	—	+
Función	C	D	C

La función es creciente en el intervalo $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$ y decreciente en el intervalo $\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$

Tiene un Máximo en $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{32}{27}\right)$ y un mínimo en $(1,0)$

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x)=6x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{3}$

	$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$
Signo $f''(x)$	−	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en el intervalo $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$ y convexa en el intervalo $\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$

Tiene un punto de inflexión en $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{16}{27}\right)$

Unos productores de cereales realizan un estudio para conocer la posible demanda de su producto. Concluyen que la función de demanda de dichos cereales tiene la forma $D(x) = -200x^3 + 2100x^2 - 7200x + 10000$, para $0 \leq x \leq 4$, donde x es el precio en euros por kilogramo de producto y $D(x)$ es la cantidad de kilogramos de cereales que los consumidores están dispuestos a comprar a dicho precio x.
a) ¿Cuál es la cantidad de cereales demandada si el precio es de 0'50 euros por kilogramo?
b) Calcule para qué precio se alcanza una demanda mínima del producto y determine dicha demanda.
SOCIALES II. 2019 RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$D(x) = -200 \cdot (0'5)^3 + 2100 \cdot (0'5)^2 - 7200 \cdot 0'5 + 10000 = 6900 \text{ Kilogramos de cereales}$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$D'(x) = -600x^2 + 4200x - 7200 = 0 \Rightarrow x = 3 \ ; \ x = 4$$

	$(0,3)$	$(3,4)$
Signo $D'(x)$	$-$	$+$
Función	D	C

La función es creciente en el intervalo $(3,4)$ y decreciente en el intervalo $(0,3)$
Tiene un mínimo en $(3,1900)$

Luego, la demanda mínima es de 1900 kilogramos y se alcanza para una precio de 3 €

Se considera la función $f(x)=x-\dfrac{3x-1}{x+1}$.
a) Indique el dominio de *f* y calcule $f'(x)$.
b) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=\dfrac{2}{3}$.
c) Halle los puntos de la gráfica de *f* en los que la recta tangente a dicha gráfica es horizontal.
SOCIALES II. 2019 RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) $f(x)=x-\dfrac{3x-1}{x+1}=\dfrac{x^2-2x+1}{x+1}$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1\}$

Calculamos la derivada: $f'(x)=\dfrac{(2x-2)\cdot(x+1)-1\cdot(x^2-2x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

b) $m=f'\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)-3}{\left(\dfrac{2}{3}+1\right)^2}=-\dfrac{11}{25}$

c) Si la tangente es horizontal $\Rightarrow m=0$

Luego: $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=0\Rightarrow x^2+2x-3=0\Rightarrow x=1\ ;\ x=-3$

Por lo tanto, los puntos donde la recta tangente es horizontal son: $(1,0)$ y $(-3,-8)$

Se considera la función $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$.
a) Estudie su monotonía y halle sus extremos relativos.
b) Determine los intervalos de concavidad y convexidad. Calcule su punto de inflexión.
c) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.
d) Calcule $\int f(x)\,dx$.
SOCIALES II. 2019 RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=1\ ;\ x=3$

	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
Signo f'	+	−	+
Función	C	D	C

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ y decreciente en el intervalo $(1,3)$

Tiene un Máximo en $\left(1,\frac{7}{3}\right)$ y un mínimo en $(3,1)$

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x)=2x-4=0 \Rightarrow x=2$

	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
Signo f''	−	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en el intervalo $(-\infty,2)$ y convexa en el intervalo $(2,+\infty)$

Tiene un punto de inflexión en $\left(2,\frac{5}{3}\right)$

c) La pendiente de la recta tangente es: $f'(x)=x^2-4x+3 \Rightarrow f'(0)=3=m$

d) Calculamos la integral

$$\int\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1\right)dx=\frac{1}{3}\int x^3\,dx-2\int x^2\,dx+3\int x\,dx+\int dx=\frac{1}{3}\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+x+C=$$

$$=\frac{x^4}{12}-\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+x+C$$

El coste de producción de un bien en una fábrica viene dado por $C(x)=2(2x-1)^2+1$, con $0\leq x\leq 2$, donde x es la cantidad producida en millones de kilogramos.
a) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $C(x)$.
b) Determine la cantidad a producir para que el coste de producción sea mínimo. ¿Cuál es dicho coste?.
c) Realice un esbozo de la gráfica de la función $C(x)$.
SOCIALES II. 2019. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$C'(x)=2\cdot 2\cdot(2x-1)\cdot 2=16x-8=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},2\right)$
Signo $C'(x)$	$-$	$+$
Función	D	C

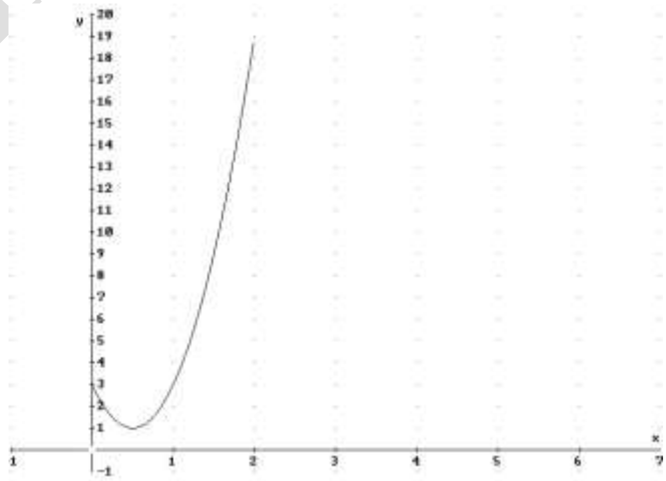
La función es decreciente en $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(\frac{1}{2},2\right)$. Tiene un mínimo relativo en $\left(\frac{1}{2},1\right)$

b) Nos piden el mínimo absoluto, que puede estar en los extremos del intervalo, es decir, en $x=0$ ó en $x=2$, ó en el mínimo relativo. Calculamos el valor que toma la función en esos puntos para ver cuál es el mínimo absoluto.

$$C(0)=3$$
$$C\left(\frac{1}{2}\right)=1$$
$$C(2)=19$$

Luego, el coste mínimo es con una producción de 0'5 millones de kilogramos y vale 1.

c) Hacemos la gráfica de la función



De una cierta función *f*, sabemos que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$

a) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, y calcule la abscisa de sus extremos relativos.

b) Determine la curvatura de *f* y halle la abscisa de su punto de inflexión.

c) Calcule la función *f*, sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(-1,3)$.

SOCIALES II. 2019. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Igualamos la derivada a cero.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \ ; \ x = -1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
Signo f'	+	−	+
Función	C	D	C

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ y decreciente en el intervalo: $(-1,1)$.
Tiene un máximo en el punto $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$.

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
Signo f''	−	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en $(-\infty,0)$ y convexa en $(0,\infty)$. Tiene un punto de inflexión en $x = 0$

b) Calculamos la integral

$$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int (3x^2 - 3)\, dx = 3\frac{x^3}{3} - 3x + C = x^3 - 3x + C$$

Como sabemos que pasa por el punto $(-1,3)$, entonces:

$$f(-1) = 3 \Rightarrow (-1)^3 - 3\cdot(-1) + C = 3 \Rightarrow C = 1$$

Luego, la función es: $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Se considera la función $f(x)=ax^3+bx+11$

a) Calcule los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un extremo en el punto $(2,5)$

b) Para $a=\frac{3}{8}$ y $b=-\frac{9}{2}$, estudie sus extremos relativos.

c) Calcule $\int\left(x^2+3x+\frac{6}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx$

SOCIALES II. 2019. PONENCIA 16

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la deriva: $x=-1\Rightarrow\ f'(x)=3ax^2+b$

Por tener un extremo en $(2,5)\Rightarrow\begin{cases} f'(2)=0\Rightarrow 3a\cdot 2^2+b=0 \\ f(2)=5\Rightarrow a\cdot 2^3+b\cdot 2+11=5\end{cases}$

Luego, resolviendo el sistema: $\left.\begin{array}{l} 12a+b=0 \\ 8a+2b+11=5\end{array}\right\}\Rightarrow a=\frac{3}{8}\ ;\ b=-\frac{9}{2}$

b) Calculamos la derivada de $f(x)=\frac{3}{8}x^3-\frac{9}{2}x+11$ y la igualamos a cero:

$$f'(x)=\frac{9}{8}x^2-\frac{9}{2}=0\Rightarrow 9x^2-36=0\Rightarrow x=\pm\ 2$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	−	+
Función	C	D	C

La función es creciente en: $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$. Decreciente en $(-2,2)$.

Tiene un máximo en $(-2,17)$ y un mínimo en $(2,5)$

c) Calculamos la integral

$$\int\left(x^2+3x+\frac{6}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx=\int x^2\,dx+3\int x\,dx+6\int\frac{dx}{x}-2\int x^{-2}\,dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+6\ln|x|-2\frac{x^{-1}}{-1}+C=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+6\ln|x|+\frac{2}{x}+C$$

Se considera la función dada por $f(x)=\begin{cases} a-x & si \quad x\le -3 \\ -3a-x^2 & si \quad -3<x\le 2 \\ x^2-8x+17 & si \quad x>2 \end{cases}$

a) Determine el valor de *a* para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio. Para ese valor de *a* ¿es $f(x)$ derivable en todo su dominio?.

b) Para $a=-3$, esboce la gráfica de la función $f(x)$.

c) Calcule $\int \left(x^2-8x+17\right)\,dx$

SOCIALES II. 2019. PONENCIA 17

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos *a* para que sea continua en $x=-3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -3^-}(a-x)=a+3 \\ \lim\limits_{x\to -3^+}(-3a-x^2)=-3a-9 \end{array}\right\} \Rightarrow a+3=-3a-9 \Rightarrow 4a=-12 \Rightarrow a=-3$$

Luego, para $a=-3$, la función es continua en su dominio.

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x<-3 \\ -2x & si \quad -3<x<2 \\ 2x-8 & si \quad x>2 \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en $x=-3$:

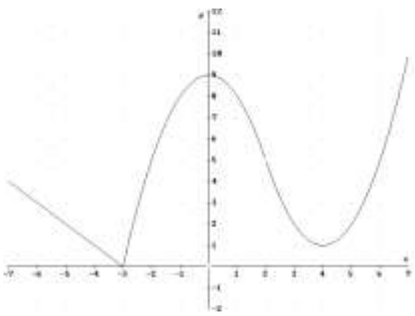
$$\left.\begin{array}{l} f'(-3^-)=-1 \\ f'(-3^+)=\ \ 6 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(-3^-)\neq f'(-3^+) \Rightarrow \text{ No es derivable en } x=-3$$

Estudiamos la derivabilidad en $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=-4 \\ f'(2^+)=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)\neq f'(2^+) \Rightarrow \text{ Es derivable en } x=2$$

Luego, la función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{-3\}$

b) Dibujamos la función: $f(x)=\begin{cases} -3-x & si \quad x\le -3 \\ 9-x^2 & si \quad -3<x\le 2 \\ x^2-8x+17 & si \quad x>2 \end{cases}$



c) Calculamos la integral

$$\int \left(x^2-8x+17\right)\,dx=\int x^2\,dx-8\int x\,dx+17\int dx=\frac{x^3}{3}-8\frac{x^2}{2}+17x+C=\frac{x^3}{3}-4x^2+17x+C$$

Se considera la función $f(x)=\dfrac{-4x+1}{2x-5}$

a) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$**.**

b) Calcule las asíntotas de la función $f(x)$**.**

c) Calcule $\int\left(-2-\dfrac{9}{2x-5}\right)dx$

SOCIALES II. 2019. PONENCIA 18

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=\frac{-4\cdot(2x-5)-2\cdot(-4x+1)}{(2x-5)^2}=\frac{18}{(2x-5)^2}=0\Rightarrow \text{ No tiene solución}$$

	$\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right)$	$\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$
Signo $f'(x)$	+	+
Función	C	C

La función es creciente en su dominio, es decir: $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$.

b) Calculamos las asíntotas

Verticales: $x=\dfrac{5}{2}$, ya que: $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}^-}\dfrac{-4x+1}{2x-5}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}^+}\dfrac{-4x+1}{2x-5}=-\infty$

Horizontales: $y=-2$, ya que: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x+1}{2x-5}=\dfrac{\infty}{\infty}=\dfrac{-4}{2}=-2$

Oblicuas: No tiene, ya que tiene asíntota horizontal.

c) Calculamos la integral

$$\int\left(-2-\frac{9}{2x-5}\right)dx=-2\int dx-9\int\frac{dx}{2x-5}=-2x-9\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2\,dx}{2x-5}=-2x-\frac{9}{2}\ln|2x-5|+C$$

Dada la función $f(x)=2(x+e^{2x})$ calcule:
a) Los puntos de inflexión de la función $f(x)$, en caso de que existan.
b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.
c) Calcule la función $F(x)$ sabiendo que $F'(x)=f(x)$ y que su gráfica pasa por el punto $(0,2)$
SOCIALES II. 2019. PONENCIA 19

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=2(1+2e^{2x})$$

$$f''(x)=2\cdot 4e^{2x}=8\cdot e^{2x}=0\Rightarrow \text{No tiene solución}$$

	$(-\infty,+\infty)$
Signo $f''(x)$	+
Función	Cx

La función es convexa en su dominio y no tiene puntos de inflexión.

b) La ecuación de la tangente en $x=0$ es: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$f(0)=2(0+e^{2\cdot 0})=2$

$f'(x)=2(1+2e^{2x})\Rightarrow f'(0)=2(1+2e^{2\cdot 0})=6$

Sustituyendo, tenemos que: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Rightarrow y-2=6\cdot(x-0)\Rightarrow y=6x+2$

c) Calculamos la integral

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int 2(x+e^{2x})\,dx=2\int x\,dx+\int 2e^{2x}\,dx=x^2+e^{2x}+C$$

Como sabemos que: $F(0)=2\Rightarrow 0+e^{2\cdot 0}+C=2\Rightarrow 1+C=2\Rightarrow C=1$

Luego, la función que nos piden es: $F(x)=x^2+e^{2x}+1$

De una cierta función *f*, sabemos que su función derivada es $f'(x)=3x^2-6x-9$

a) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f* y calcule las abscisas de los puntos extremos relativos.

b) Determine la curvatura de la función *f* y la abscisa de su punto de inflexión.

c) Sabiendo que la función *f* pasa por el punto $(0,1)$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en dicho punto.

d) Calcule la expresión de la función *f*, sabiendo que la gráfica de la función pasa por el punto $(0,1)$.

SOCIALES II. 2019. PONENCIA 20

R E S O L U C I Ó N

a) Igualamos la cero: $f'(x)=3x^2-6x-9=0 \Rightarrow x=3\ ;\ x=-1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	−	+
Función	C	D	C

La función es creciente en $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ y decreciente en $(-1,3)$

Máximo en $x=-1$ y mínimo en $x=3$.

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x)=6x-6=0 \Rightarrow x=1$

	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f''(x)$	−	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en $(-\infty,1)$ y convexa en $(1,+\infty)$

Punto de inflexión en $x=1$.

c) La ecuación de la tangente en $x=0$ es: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$f(0)=1$

$f'(x)=3x^2-6x-9 \Rightarrow f'(0)=-9$

Sustituyendo, tenemos que: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Rightarrow y-1=-9\cdot(x-0)\Rightarrow y=-9x+1$

d) Calculamos la integral

$$f(x)=\int(3x^2-6x-9)\,dx=3\int x^2\,dx-6\int x\,dx-9\int dx=3\frac{x^3}{3}-6\frac{x^2}{2}-9x+C=x^3-3x^2-9x+C$$

Como sabemos que: $f(0)=1\Rightarrow 0^3-3\cdot0^2-9\cdot0+C=1\Rightarrow C=1$

Luego, la función que nos piden es: $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

La función de beneficios de una empresa, expresada en miles de euros, depende de la cantidad de producto fabricada, x , expresada en miles de kg, según la función $B(x)$. Si la función de beneficios marginales de la empresa (derivada de la función de beneficios) tiene la expresión $B'(x)=140-\frac{180}{x+1}-40x$, se pide:
a) Determine la cantidad a producir por la empresa para maximizar los beneficios.
b) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función de beneficios de la empresa.
c) Obtenga la expresión de la función de beneficios $B(x)$, si se considera que, si no se produce nada, el beneficio es nulo, es decir, $B(0)=0$.
SOCIALES II. 2019. PONENCIA 21

R E S O L U C I Ó N

a y b) Igualamos la derivada a cero.

$$B'(x)=140-\frac{180}{x+1}-40x=0\Rightarrow \frac{140x+140-180-40x^2-40x}{x+1}=0\Rightarrow \frac{100x-40-40x^2}{x+1}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -40x^2+100x-40=0\Rightarrow x=2\ ;\ x=\frac{1}{2}$$

	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},2\right)$	$\left(2,+\infty\right)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$	$-$
Función	D	C	CD

La función es creciente en $\left(\frac{1}{2},2\right)$ y decreciente en $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

Máximo en $x=2$ y mínimo en $x=\frac{1}{2}$.

El máximo beneficio $B(2)$, se obtiene fabricando 2000 kg de producto.

c) Calculamos la integral

$$B(x)=\int\left(140-\frac{180}{x+1}-40x\right)dx=140\int dx-180\int\frac{dx}{x+1}-40\int x\,dx=140x-180\ln|x+1|-20x^2+C$$

Como sabemos que: $B(0)=0\Rightarrow 140\cdot 0-180\ln 1-20\cdot 0^2+C=0\Rightarrow C=0$

Luego, la función que nos piden es: $B(x)=140x-180\ln|x+1|-20x^2$