EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2000

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcula $(A^t \cdot A^{-1})^2 \cdot A$

MATEMÁTICAS II. 2000. JUNIO. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t}{-2} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(A^t \cdot A^{-1})^2 \cdot A = A^t \cdot A^{-1} \cdot A^t \cdot A^{-1} \cdot A = A^t \cdot A^{-1} \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$; **calcula los siguientes determinantes y enuncia las propiedades que utilices:** $a)$ $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$; $b)$ $\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$a) \begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} a & b & 5c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot 2 = 30$$

$$b) \begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & c & b \\ 2e & f & e \\ 2h & i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} + 2\cdot \begin{vmatrix} b & c & b \\ e & f & e \\ h & i & h \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 2\cdot 0 = -2$$

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$ averiguar para qué valores del parámetro m existe A^{-1} y calcular A^{-1} para $m=2$.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix}=-m^2+4m-3=0 \Rightarrow m=1 \,;\, m=3$$

Luego, tiene inversa para todos los valores de $m \neq 1 \text{ } y \text{ } 3$

b) Calculamos la inversa para $m=2$.

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resuelve la ecuación matricial $A^2 \cdot X = 2B$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^2 \cdot X = 2B \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 52 \\ 8 & -2 & 30 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $U=\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de x e y tales que $A\cdot X=U$

b) Halla la matriz A^{-1} y calcula $A^{-1}\cdot U$

c) Encuentra los posibles valores de m para los que los vectores $A\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes.

MATEMÁTICAS II. 2000. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 4x+3y=9 \end{cases}\Rightarrow x=3\ ;\ y=-1$$

b)

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot U=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 3+2m=a \\ 4+3m=am \end{cases}\Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$$