PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2011

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de λ para los que la matriz A^2+3A no tiene inversa.
b) Para $\lambda=0$, halla la matriz X que verifica la ecuación $A\cdot X+A=2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.
MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz A^2+3A:

$$A^2+3A=\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2+5\lambda+4 & 0\\ \lambda+3 & -2\end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de dicha matriz

$$\left|A^2+3A\right|=\begin{vmatrix}\lambda^2+5\lambda+4 & 0\\ \lambda+3 & -2\end{vmatrix}=-2\lambda^2-10\lambda-8=0\Rightarrow\lambda=-1\ ;\ \lambda=-4$$

Luego, la matriz A^2+3A no tiene inversa para $\lambda=-1\ y\ \lambda=-4$, ya que su determinante vale cero.

b) Resolvemos la ecuación matricial.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a & b\\ a-c & b-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=1\\ b=0\\ a-c=-1\\ b-d=3\end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema, tenemos que la matriz que nos piden es: $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}$

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son $|A| = \frac{1}{2}$ y $|B| = -2$. Halla:

a) $|A^3|$

b) $|A^{-1}|$

c) $|-2A|$

d) $|AB^t|$**, siendo** B^t **la matriz traspuesta de** B**.**

e) El rango de B**.**

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $|A^3| = |A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) Sabemos que: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso será: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

c) Si A_n es una matriz cuadrada de orden *n*, sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|-2A| = (-2)^3 \cdot |A| = (-8) \cdot \frac{1}{2} = -4$

d) $|A \cdot B^t| = |A| \cdot |B^t| = |A| \cdot |B| = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$

e) Como $|B| = -2 \neq 0$, el rango de B es 3.

Dada la matriz $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Demuestra que se verifica la igualdad $A^3=-I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.
b) Justifica que A es invertible y halla su inversa.
c) Calcula razonadamente A^{100}
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 3.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego, se cumple que $A^3=-I$

b) Calculamos $|A|=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=15+12-16-12=-1\neq 0\Rightarrow$ Tiene inversa

Calculamos la inversa

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$A^{100}=A^{99}\cdot A=(A^3)^{33}\cdot A=(-I)^{33}\cdot A=-A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & -1 & \lambda\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

a) ¿Hay algún valor de λ para el que A no tiene inversa?.

b) Para $\lambda=1$, resuelve la ecuación matricial $A^{-1}\cdot X\cdot A=B$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A.

$|A|=\lambda^2+1=0\Rightarrow$ No hay ningún valor real de λ para el cual el determinante valga cero, luego, siempre tiene inversa

b) Calculamos la matriz *X*:

$$A^{-1}\cdot X\cdot A=B\Rightarrow A\cdot A^{-1}\cdot X\cdot A\cdot A^{-1}=A\cdot B\cdot A^{-1}\Rightarrow X=A\cdot B\cdot A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A:

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}^t}{2}=\frac{\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}{2}$$

$$X=A\cdot B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\frac{\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Sean A y B dos matrices que verifican:

$$A+B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A-B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Halla las matrices $(A+B)(A-B)$ y A^2-B^2

b) Resuelve la ecuación matricial $XA-XB-(A+B)^t=2I$, siendo I la matriz unidad de orden 2 y $(A+B)^t$ la matriz traspuesta de $A+B$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} A+B&=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ A-B&=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2A=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};\ A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo, tenemos: $B=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos: $(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial: $XA-XB-(A+B)^t=2I \Rightarrow X(A-B)-(A+B)^t=2I$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 2a-b & 4a+2b \\ 2c-d & 4c+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 2a-b&=6 \\ 4a+2b&=3 \\ 2c-d&=2 \\ 4c+2d&=4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a=\frac{15}{8};\ b=-\frac{9}{4};\ c=1;\ d=0$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X=\begin{pmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{9}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de λ para los que la matriz $A-2I$ tiene inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) Para $\lambda=-2$, resuelve la ecuación matricial $AX=2X+I$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A-2I=\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Igualamos el determinante de dicha matriz a cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix}=\lambda-2-\lambda^3+2\lambda^2=0\Rightarrow \lambda=1\,;\ \lambda=-1\,;\ \lambda=2$$

Luego, la matriz tiene inversa para todos los valores de $\lambda\neq 1,-1\ y\ 2$

b) Resolvemos la ecuación matricial:

$$AX=2X+I\Rightarrow AX-2X=I\Rightarrow (A-2I)X=I\Rightarrow X=(A-2I)^{-1}\cdot I$$

$$(A-2I)^{-1}=\frac{((A-2I)^d)^t}{|A-2I|}=\frac{\begin{pmatrix} -4 & 15 & -8 \\ 0 & -3 & 0 \\ -8 & 15 & -4 \end{pmatrix}^t}{12}=\frac{\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}}{12}$$

Luego, la matriz es $X=\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

a) Demuestra que $A^2+2A=I$ y que $A^{-1}=A+2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

b) Calcula la matriz X que verifica la ecuación: $A^2+XA+5A=4I$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) $$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}$$

$$A^2+2A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I\Rightarrow \text{Es cierto.}$$

Multiplicamos la igualdad anterior por A^{-1} a la izquierda:

$$A^2+2A=I\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot A+2A^{-1}\cdot A=A^{-1}\cdot I\Rightarrow A+2I=A^{-1}\Rightarrow \text{Es cierto}$$

b) Vamos a resolver la ecuación matricial $A^2+XA+5A=4I$:

Multiplicamos por A^{-1} a la derecha.

$$A^2+XA+5A=4I\Rightarrow A\cdot A\cdot A^{-1}+X\cdot A\cdot A^{-1}+5A\cdot A^{-1}=4I\cdot A^{-1}\Rightarrow A+X+5I=4A^{-1}\Rightarrow X=4A^{-1}-A-5I$$

Sustituimos $A^{-1}=A+2I$

$$X=4A^{-1}-A-5I=4(A+2I)-A-5I=3(A+I)=3\cdot\left[\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 6 & 0\end{pmatrix}$$

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de A **dependiendo de los valores** α**.**

b) Para $\alpha=2$**, resuelve la ecuación matricial** $A\cdot X=B$**.**

MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A y los igualamos a cero:

$$|A|=\begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^3-3\alpha+2=0 \Rightarrow \alpha=1\ ;\ \alpha=-2$$

Calculamos el rango de A para los distintos valores:

	R(A)
$\alpha=1$	1
$\alpha=-2$	2
$\alpha\neq 1\ y\ -2$	3

b) Calculamos la matriz inversa de A para $\alpha=2$.

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^t}{4}=\frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}{4}$$

Resolvemos la ecuación matricial.

$$A\cdot X=B \Rightarrow X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de α **para los que la matriz inversa de** A **es** $\frac{1}{12}A$**.**

b) Para $\alpha=-3$**, determina la matriz X que verifica la ecuación** $A^t \cdot X = B$**, siendo** A^t **la matriz traspuesta de** A**.**

MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz inversa de A

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}^t}{4\alpha}=\frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}}{4\alpha}$$

$$\frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}}{4\alpha}=\frac{\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}}{12}\Rightarrow\begin{pmatrix} \frac{3}{4\alpha} & -\frac{1}{4\alpha} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{\alpha}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix} \frac{3}{4\alpha}=\frac{\alpha}{12} \\ -\frac{1}{4\alpha}=\frac{1}{12} \\ \frac{1}{4}=-\frac{\alpha}{12} \end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha=-3$$

El único valor que verifica todas las igualdades es $\alpha=-3$

b) Calculamos la matriz inversa de A para $\alpha=-3$: $(A)^{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}}{4\alpha}=\frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}}{-12}$

Por las propiedades de las matrices sabemos que: $\left(A^t\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^t$, luego, la aplicamos para resolver la ecuación matricial

$$A^t\cdot X=B\Rightarrow X=(A^t)^{-1}\cdot B=(A^{-1})^t\cdot B=-\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 2 & -15 & -7 \end{pmatrix}$$