EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2016

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

a) Halla la matriz X que verifica $A\cdot X+B=2A$.

b) Calcula B^2 y B^{2016}.

MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 3.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si multiplicamos los dos términos de la ecuación por A^{-1} a la izquierda, nos queda:

$$A\cdot X+B=2A \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X+A^{-1}\cdot B=2A^{-1}\cdot A \Rightarrow X=2I-A^{-1}\cdot B$$

Calculamos la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X=2I-A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -11 & 9 & 5 \\ -8 & 7 & 4 \\ -6 & 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & -9 & -5 \\ 8 & -5 & -4 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos

$$B^2=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^4=B^3\cdot B=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$B^{2016}=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Determina, si existe, la matriz X **que verifica** $A\cdot X+B^2=B\cdot X+A^2$**.**
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 3.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Despejamos la matriz X:

$$A\cdot X+B^2=B\cdot X+A^2\Rightarrow A\cdot X-B\cdot X=A^2-B^2\Rightarrow (A-B)\cdot X=A^2-B^2\Rightarrow X=(A-B)^{-1}\cdot(A^2-B^2)$$

Calculamos la matriz inversa de $A-B=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A-B)^{-1}=\frac{((A-B)^d)^t}{|A-B|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^t}{2}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^2, B^2 y A^2-B^2

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X=(A-B)^{-1}\cdot(A^2-B^2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$. Determina, si existen, los valores de k en cada uno de los casos siguientes: a) $Rango(A)=1$. b) $A^2=A$. c) A tiene inversa. d) $\det(A)=-2$.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero

$$\begin{vmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{vmatrix} = k^2-1=0 \Rightarrow k=1 \; ; \; k=-1$$

Luego, el rango de A es 1 si $k=1$ ó $k=-1$

b)

$$A^2=A \Rightarrow \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k+k^2 \\ k-k^2 & 1-k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1=k \Rightarrow k=1 \\ k+k^2=1+k \Rightarrow k=1 \; ; \; k=-1 \\ k-k^2=1-k \Rightarrow k=1 \\ 1-k^2=0 \Rightarrow k=1 \; ; \; k=-1 \end{cases}$$

Luego, para $k=1$, se cumple que $A^2=A$

c) A tiene inversa para todos los valores de $k \neq 1$ y $k \neq -1$. Ya que es una matriz cuadrada y para esos valores su determinante es distinto de cero.

d) $\begin{vmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow k^2-1=-2 \Rightarrow k^2+1=0$

No hay ningún valor de k que haga que su determinante valga -2

Considera la matriz: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina, si existen, los valores de λ para los que $A^{-1}=2I-A$ (siendo I la matriz identidad de orden 3).

b) Determina, si existen, los valores de λ para los que la matriz $A+A^t$ no tiene inversa (A^t es la matriz traspuesta de A).

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\lambda-1 & \lambda^2+\lambda+1 & 1 \end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & \lambda^2+\lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & \lambda^2+\lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=2I-A\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & \lambda^2+\lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & \lambda^2+\lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\lambda^2+\lambda+1=1\Rightarrow\lambda^2+\lambda=0\Rightarrow\lambda=0\,;\lambda=-1$$

b) Calculamos

$$A+A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda+1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ \lambda+1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante.

$$\left|A+A^t\right|=\begin{vmatrix} 2 & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ \lambda+1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-6\lambda^2-6\lambda+4=0\Rightarrow\lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{6}$$

Luego, la matriz $A+A^t$ no tiene inversa si $\lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{6}$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de $A\cdot B^t+\lambda I$ **según los valores de** λ **(**B^t **es la matriz traspuesta de** B**,** I **es la matriz identidad de orden 3).**

b) Calcula la matriz X **que verifica:** $C\cdot X-X=2I$

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A\cdot B^t+\lambda I$

$$A\cdot B^t+\lambda I=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1\\-1&-1+\lambda&-1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante y lo igualamos a cero.

$$\left|A\cdot B^t+\lambda I\right|=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\-1&-1+\lambda&-1\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-\lambda+\lambda=0\Rightarrow\lambda=0$$

Si $\lambda\neq 0\Rightarrow$ Rango(A) = 3.
Si $\lambda=0\Rightarrow$ Rango(A) = 1.

b) $C\cdot X-X=2I\Rightarrow(C-I)\cdot X=2I\Rightarrow X=(C-I)^{-1}\cdot 2I=2(C-I)^{-1}$

Calculamos la matriz $C-I=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&-2&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$

Calculamos la matriz inversa de $C-I$.

$$(C-I)^{-1}=\frac{((C-I)^d)^t}{|C-I|}=\frac{\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\1&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X=2\cdot\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\1&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-2&-2\\2&0&2\\0&0&-2\end{pmatrix}$