

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

emestrada

Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros, respectivamente. El coste total de la operación ha sido 40.500 euros. Calcula cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos se ha comprado el 30% de las cajas.

MATEMÁTICAS II. 2009. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Planteamos un sistema de ecuaciones.

x = cajas de 30 €

y = cajas de 20 €

z = cajas de 40 €

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1500 \\ 30x + 20y + 40z = 40500 \\ x = 450 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 450 ; y = 750 ; z = 300$$

Luego, en el primer mercado se ha pagado $30 \cdot 450 = 13.500$ €, en el segundo mercado se ha pagado $20 \cdot 750 = 15.000$ € y en el tercer mercado se ha pagado $40 \cdot 300 = 12.000$ €.

Tratamos de adivinar, mediante ciertas pistas, los precios de tres productos A , B y C .

Pista 1: Si compramos una unidad de A , dos de B y una de C gastamos 118 €.

Pista 2: Si compramos n unidades de A , $n+3$ unidades de B y 3 de C gastamos 390 €.

a) ¿Hay algún valor de n para el que estas dos pistas sean incompatibles?.

b) Sabiendo que $n = 4$ y que el producto C cuesta el triple que el producto A , calcula el precio de cada producto.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} A + 2B + C = 118 \\ nA + (n+3)B + 3C = 390 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ n & n+3 & 3 \end{pmatrix}$$

Para $n = 3$, el sistema resulta incompatible, ya que $\text{Rango } A = 1$ y $\text{Rango } M = 2$.

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} A + 2B + C = 118 \\ 4A + 7B + 3C = 390 \\ C = 3A \end{array} \right\} \Rightarrow A = 23 ; B = 13 ; C = 69$$

$$\left. \begin{array}{l} x + \lambda y + z = 4 \\ \text{Dado el sistema de ecuaciones lineales: } x + 3y + z = 5 \\ \lambda x + y + z = 4 \end{array} \right\}$$

a) Discútelo según los valores del parámetro λ .

b) Resuélvelo en el caso $\lambda = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 2. EJERCICIO 3.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 ; \lambda = 3$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda = 3$	2	3	S. Incompatible
$\lambda \neq 1$ y 3	3	3	S. Compatible Determinado

b) Vamos a resolverlo para $\lambda = 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 4 - z \\ x + 3y = 5 - z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} - z \\ y = \frac{1}{2} \\ z = z \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 2 \\ -x + y + 2z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 2 \end{array} \right\}$$

b) Calcula λ sabiendo que el siguiente sistema tiene alguna solución común con el del

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ -x + y + 3z = 1 \\ x + 2y + \lambda z = -3 \end{array} \right\}$$

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 3. EJERCICIO 3.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El sistema es compatible indeterminado

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 2 \\ -x + y + 2z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2 - z \\ -x + y = -2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - z \\ y = 2 - 3z \\ z = z \end{array} \right.$$

b) Sustituimos las soluciones del apartado anterior en el sistema.

$$\left| A \right| = \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ -x + y + 3z = 1 \\ x + 2y + \lambda z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 - z + 2 - 3z + z = 1 \\ -2 + z + 2 - 3z + 3z = 1 \\ 2 - z + 4 - 6z + \lambda z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3z = -3 \\ z = 1 \\ -7z + \lambda z = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow z = 1; \lambda = -2$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Calcula, si existe, A^{-1} .

b) Resuelve el sistema $AX = 3X$ e interpreta geoméricamente el conjunto de sus soluciones.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a) Calculamos la matriz inversa.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}^t}{27} = \frac{\begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}}{27} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos el sistema $\begin{cases} -2x - 2y + z = 3x \\ -2x + y - 2z = 3y \\ x - 2y - 2z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x - 2y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$

Como $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(M) = 2 \Rightarrow$ Son tres planos distintos que se cortan en una recta

$$\begin{cases} -5x - 2y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y = z \\ -x - y = z \end{cases} \Rightarrow x = z; y = -2z; z = z$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = m + 1 \\ \text{Sea el sistema de ecuaciones lineales: } x + my + z = 1 \\ mx + y - z = m \end{array} \right\}$$

- a) Determina los valores de m para los que el sistema es compatible.
b) Resuelve el sistema en el caso $m = -1$.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 4. EJERCICIO 3.OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

- a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2 \text{ para cualquier valor de } m$$

- Calculamos el determinante de la matriz ampliada y lo igualamos a cero

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & -1 & m \end{vmatrix} = -m^2 - m = 0 \Rightarrow m = 0 ; m = -1$$

	R(A)	R(M)	
$m = 0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$m = -1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$m \neq 0, 1, -1$	2	3	S. Incompatible

b) Vamos a resolverlo para $m = -1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - y = 1 - z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1-z}{2} \\ y = \frac{-1+z}{2} \\ z = z \end{cases}$

a) Discute según los valores del parámetro λ el siguiente sistema
$$\left. \begin{array}{l} 3x + \lambda y = 0 \\ x + \lambda z = \lambda \\ x + y + 3z = 1 \end{array} \right\}$$

b) Resuélvelo para $\lambda = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2009. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \lambda^2 - 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 ; \lambda = 6$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda = 6$	2	3	S. Incompatible
$\lambda \neq 0$ y 6	3	3	S. Compatible Determinado

b) Lo resolvemos para $\lambda = 0$. El sistema es
$$\left. \begin{array}{l} 3x = 0 \\ x + y + 3z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - 3z \\ z = z \end{cases}$$