

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera el plano π de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$ y la recta r de ecuación $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m}$

- a) Halla la posición relativa de r y π según los valores del parámetro m .
 b) Para $m = -3$, halla el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π .
 c) Para $m = -3$, halla el plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π .

MATEMÁTICAS II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Podemos pasar la ecuación de la recta r a implícitas $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=5 \\ mx+2z=12+5m \end{cases}$

Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano $\left. \begin{array}{l} 2x+y-z=-2 \\ x+2y=5 \\ mx+2z=12+5m \end{array} \right\}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 2m = 0 \Rightarrow m = -3$$

	R(A)	R(M)	
$m = -3$	2	3	Recta paralela al plano.
$m \neq -3$	3	3	Recta secante al plano.

b) La ecuación de todos los planos que contienen a la recta r es:

$$x + 2y - 5 + k(-3x + 2z + 3) = 0 \Rightarrow (1-3k)x + 2y + 2kz - 5 + 3k = 0$$

El vector normal de este plano $(1-3k, 2, 2k)$ y el vector normal del plano π $(2, 1, -1)$, tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar vale 0.

$$(1-3k, 2, 2k) \cdot (2, 1, -1) = 0 \Rightarrow 2 - 6k + 2 - 2k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo, tenemos que el plano pedido es: $-x + 4y + 2z - 7 = 0$

c) La ecuación de todos los planos que contienen a la recta r es:

$$x + 2y - 5 + k(-3x + 2z + 3) = 0 \Rightarrow (1-3k)x + 2y + 2kz - 5 + 3k = 0$$

El vector normal de este plano $(1-3k, 2, 2k)$ y el vector normal del plano π $(2, 1, -1)$, tienen que ser paralelos, luego sus componentes tienen que ser proporcionales.

$$\frac{1-3k}{2} = \frac{2}{1} = \frac{2k}{-1} \Rightarrow k = -1$$

Sustituyendo, tenemos que el plano pedido es: $4x + 2y - 2z - 8 = 0$

Considera el punto $P(3,2,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

- a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y a la recta r .
b) Determina las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto de la recta r .
MATEMÁTICAS II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

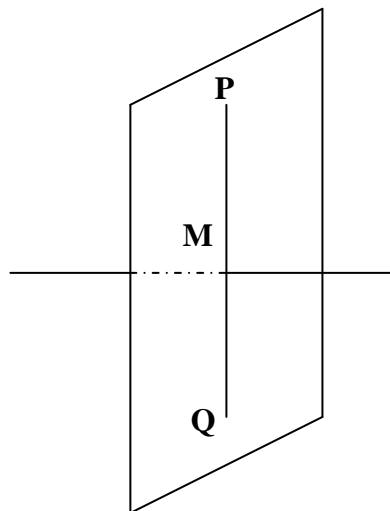
a) La ecuación del haz de planos que contiene a la recta r es: $x + y - z - 3 + k(x + 2z + 1) = 0$. De todos esos planos nos interesa el que pasa por el punto $P(3,2,0)$, luego:

$$3 + 2 - 0 - 3 + k(3 + 0 + 1) = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

por lo tanto, el plano pedido tiene de ecuación:

$$x + y - z - 3 - \frac{1}{2}(x + 2z + 1) = 0 \Rightarrow x + 2y - 4z - 7 = 0$$

b) El punto Q simétrico del punto P respecto de la recta r , está situado en un plano que pasando por el punto P es perpendicular a r y además la distancia que hay desde el punto P a la recta r es la misma que la que hay desde el punto Q hasta dicha recta.



Pasamos la ecuación de la recta a forma paramétrica $r \equiv \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 4 + 3t \\ z = t \end{cases}$

Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto P es perpendicular a r . Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(-2, 3, 1)$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $-2x + 3y + z + D = 0$. Como nos interesa el que pasa por el punto $P(3,2,0)$: $-2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow -2x + 3y + z = 0$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $-2(-1 - 2t) + 3(4 + 3t) + t = 0 \Rightarrow t = -1$

luego las coordenadas del punto M son: $x = -1 - 2 \cdot (-1) = 1$; $y = 4 + 3 \cdot (-1) = 1$; $z = -1$

Como el punto M es el punto medio del segmento PQ , si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto Q , se debe verificar que: $\frac{3+a}{2} = 1$; $a = -1$; $\frac{2+b}{2} = 1$; $b = 0$; $\frac{0+c}{2} = -1$; $c = -2$

Luego el simétrico es: $Q = (-1, 0, -2)$

Sean $\vec{u} = (x, 2, 0)$, $\vec{v} = (x, -2, 1)$ y $\vec{w} = (2, -x, -4x)$ tres vectores de \mathbb{R}^3 .

a) Determina los valores de x para los que los vectores son linealmente independientes.

b) Halla los valores de x para los que los vectores son ortogonales dos a dos.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Los vectores son linealmente independientes si y solo si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ x & -2 & 1 \\ 2 & -x & -4x \end{vmatrix} = 17x^2 + 4 \neq 0, \text{ sea cual sea el valor de } x, \text{ luego los vectores son}$$

siempre linealmente independientes.

b) Si los vectores son ortogonales dos a dos sus productos escalares son cero.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (x, 2, 0) \cdot (x, -2, 1) = x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow (x, 2, 0) \cdot (2, -x, -4x) = 0 \Rightarrow 2x - 2x = 0 \Rightarrow x \text{ puede tomar cualquier valor.}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow (x, -2, 1) \cdot (2, -x, -4x) = 0 \Rightarrow 2x + 2x - 4x = 0 \Rightarrow x \text{ puede tomar cualquier valor.}$$

Por tanto, los valores que puede tomar x son 2 y -2 para que los tres vectores sean ortogonales dos a dos.

Sea r la recta de ecuación $\begin{cases} x = a + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$ y s la recta de ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{3}$

a) Calcula el valor de a sabiendo que las rectas r y s se cortan.

b) Calcula el punto de corte.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si las rectas se cortan, cualquier punto $A = (a+t, 1-2t, 4-t)$ de la recta r tiene que verificar la ecuación de la recta s , luego:

$$\frac{a+t-1}{2} = \frac{1-2t+2}{1} = \frac{4-t}{3} \Rightarrow \begin{cases} a+t-1=6-4t \\ 3a+3t-3=8-2t \end{cases} \Rightarrow a=2 ; t=1$$

Luego para $a = 2$, las rectas se cortan.

b) El punto de corte será: $A = (a+t, 1-2t, 4-t) = (2+1, 1-2, 4-1) = (3, -1, 3)$

Halla un punto A de la recta r de ecuación $x = y = z$ y un punto B de la recta s de ecuación $x = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$ de forma que la distancia entre A y B sea mínima.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = s \\ y = -s \\ z = -1 + 2s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $A = (t, t, t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (s, -s, -1 + 2s)$.

El vector \vec{AB} tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (s - t, -s - t, -1 + 2s - t)$

Como el vector \vec{AB} tiene que ser perpendicular a la recta r y s se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 &\Rightarrow s - t - s - t - 1 + 2s - t = 0 \\ \vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 &\Rightarrow s - t + s + t - 2 + 4s - 2t = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t = -\frac{1}{7}$ y $s = \frac{2}{7}$

Luego, los puntos A y B que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{7} \right) \quad y \quad B = \left(\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}, -1 + \frac{4}{7} \right) = \left(\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7} \right)$$

Sea r la recta de ecuación $\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{4}$ y s la recta dada por $\begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ -x+2y-3z=2 \end{cases}$

a) Determina la posición relativa de ambas rectas.

b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s .

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos las ecuaciones implícitas de la recta r .

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{4} \Rightarrow \begin{cases} -x+5=2y+4 \\ 4x-20=2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-z=10 \end{cases}$$

Formamos el sistema con las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ -x+2y-3z=2 \\ x+2y=1 \\ 2x-z=10 \end{cases}$ y calculamos el

rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema. Como sale que el $\text{rango}(A) = 3$ y el $\text{rango}(M) = 4$, las dos rectas se cruzan.

b) Calculamos el vector director de la recta s

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k} - 2\vec{k} + 9\vec{j} - 2\vec{i} = (4, 8, 4)$$

Calculamos el haz de planos que contiene a la recta r .

$$x+2y-1+k(2x-z-10)=0 \Rightarrow (1+2k)x+2y-kz-1-10k=0$$

El vector normal del plano $(1+2k, 2, -k)$ y el vector director de la recta $(4, 8, 4)$, tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar es cero.

$$(1+2k, 2, -k) \cdot (4, 8, 4) = 0 \Rightarrow 4+8k+16-4k=0 \Rightarrow 4k=-20 \Rightarrow k=-5$$

Luego el plano pedido es: $-9x+2y+5z+49=0$.

Considera la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$

- a) Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y no corta al eje OZ .
b) Calcula la proyección ortogonal del punto $A(1, 2, 1)$ sobre la recta r .

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos el haz de planos que contiene a la recta r .

$$x + y + z - 1 + k(x - 2y + 3z) = 0 \Rightarrow (1+k)x + (1-2k)y + (1+3k)z - 1 = 0$$

El vector normal del plano $(1+k, 1-2k, 1+3k)$ y el vector director del eje OZ $(0, 0, 1)$, tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar es cero.

$$(1+k, 1-2k, 1+3k) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Rightarrow 1+3k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

Luego el plano pedido es: $2x + 5y - 3 = 0$.

- b) Pasamos la recta r a paramétricas

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2-5t}{3} \\ y = \frac{1+2t}{3} \\ z = t \end{cases}$$

Cualquier punto B de la recta r , tendrá de componentes: $B = \left(\frac{2-5t}{3}, \frac{1+2t}{3}, t \right)$. El vector

$\vec{AB} = \left(\frac{-1-5t}{3}, \frac{-5+2t}{3}, t-1 \right)$ y el vector director de la recta $\vec{u} = (-5, 2, 3)$, tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar vale cero.

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = \left(\frac{-1-5t}{3}, \frac{-5+2t}{3}, t-1 \right) \cdot (-5, 2, 3) = 0 \Rightarrow \frac{5+25t}{3} + \frac{-10+2t}{3} + 3t-3 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{19}$$

Luego el punto B será: $B = \left(\frac{2-5t}{3}, \frac{1+2t}{3}, t \right) = \left(\frac{1}{19}, \frac{11}{19}, \frac{7}{19} \right)$

Considera los puntos $A(2,1,2)$ y $B(0,4,1)$ y la recta r de ecuación $x = y - 2 = \frac{z-3}{2}$

a) Determina un punto C de la recta r que equidiste de los puntos A y B .

b) Calcula el área del triángulo de vértices ABC .

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta r a paramétricas

$$x = y - 2 = \frac{z-3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2+t \\ z = 3+2t \end{cases}$$

Cualquier punto C , tendrá de componentes $C = (t, 2+t, 3+2t)$. Como queremos que el punto C equidiste de A y de B , entonces, el módulo del vector \vec{AC} tiene que ser igual al módulo del vector \vec{BC} .

Calculamos las coordenadas de dichos vectores: $\vec{AC} = (t-2, 1+t, 1+2t)$ y $\vec{BC} = (t, t-2, 2+2t)$ e igualamos sus módulos:

$$\sqrt{(t-2)^2 + (1+t)^2 + (1+2t)^2} = \sqrt{t^2 + (t-2)^2 + (2+2t)^2} \Rightarrow t = -1$$

Luego el punto C será: $C = (-1, 1, 1)$

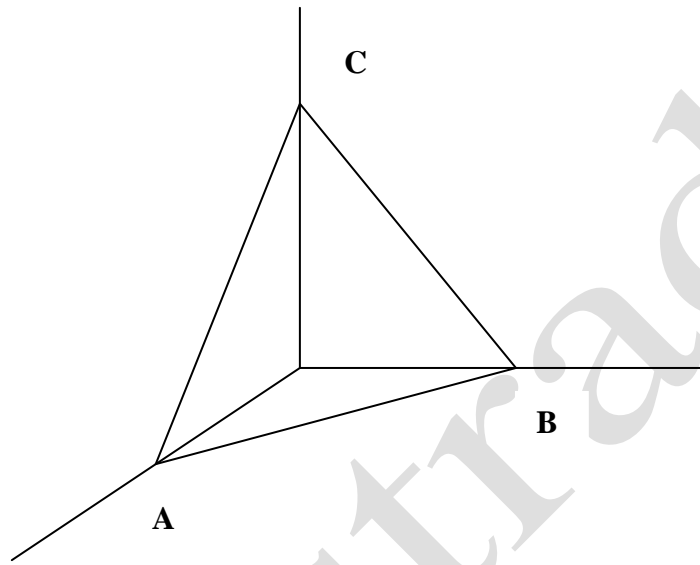
b) El área pedida es $S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}|$

$$\vec{AB} = (-2, 3, -1); \vec{AC} = (-3, 0, -1).$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} (-3\vec{i} + \vec{j} + 9\vec{k}) = \frac{1}{2} \sqrt{9+1+81} = 4\sqrt{76} u^2$$

Halla la ecuación de un plano que sea paralelo al plano π de ecuación $x + y + z = 1$ y forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área $18\sqrt{3}$.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



Un plano paralelo al plano $x + y + z = 1$ es el $x + y + z = D$. Los puntos de corte de dicho plano con los ejes coordenados serán: $A = (D, 0, 0)$; $B = (0, D, 0)$ y $C = (0, 0, D)$

El área pedida es $S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}|$

$$\vec{AB} = (-D, D, 0); \vec{AC} = (-D, 0, D).$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -D & D & 0 \\ -D & 0 & D \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} (D^2 \vec{i} + D^2 \vec{j} + D^2 \vec{k}) = \frac{1}{2} \sqrt{3D^4} = 18\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$D^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} \Rightarrow D = \sqrt{36} = \pm 6$$

Por lo tanto, hay dos planos que cumplen la condición pedida que son: $x + y + z = 6$ y $x + y + z = -6$

Sea la recta r de ecuación $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1}$ y el plano π de ecuación $x - y + z + 1 = 0$.

Calcula el área del triángulo de vértices ABC , siendo A el punto de corte de la recta r y el plano π , B el punto $(2, 1, 2)$ de la recta r y C la proyección ortogonal del punto B sobre el plano π .

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el punto de corte de la recta r con el plano π . Para ello pasamos a paramétricas la

ecuación de la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=-2+3t \\ z=3-t \end{cases}$ y la sustituimos en el plano.

$$1+t+2-3t+3-t+1=0 \Rightarrow 7-3t=0 \Rightarrow t=\frac{7}{3}$$

Luego las coordenadas del punto A son: $A = \left(1 + \frac{7}{3}, -2 + 3 \cdot \frac{7}{3}, 3 - \frac{7}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, 5, \frac{2}{3}\right)$

Calculamos la proyección ortogonal del punto B sobre el plano π . Para ello calculamos la recta que pasa por B y es perpendicular a π .

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases}$$

El punto C es el punto de corte del plano con dicha recta

$$2+t-1+t+2+t+1=0 \Rightarrow 4+3t=0 \Rightarrow t=-\frac{4}{3}$$

Luego las coordenadas del punto C son: $C = \left(2 - \frac{4}{3}, 1 + \frac{4}{3}, 2 - \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$

El área pedida es $S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}|$

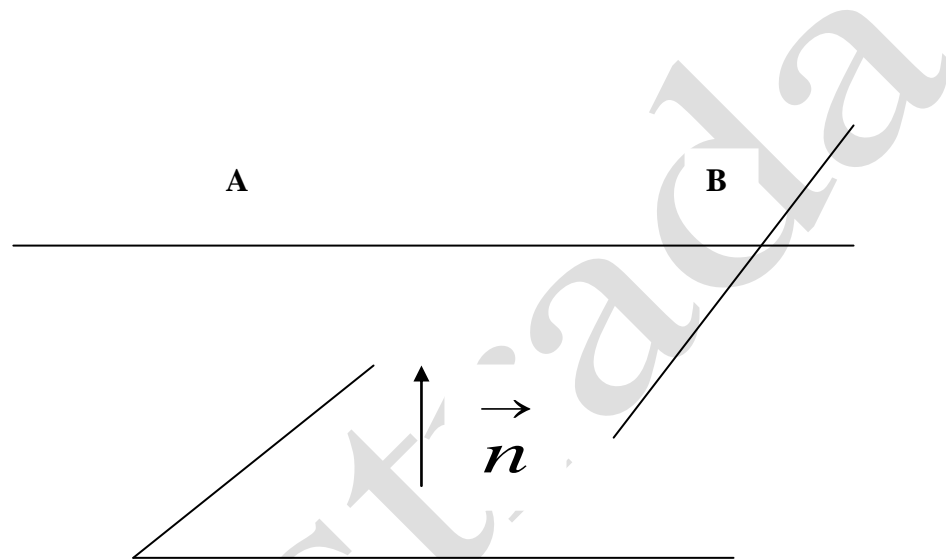
$$\vec{AB} = \left(-\frac{4}{3}, -4, \frac{4}{3}\right); \vec{AC} = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}, 0\right).$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{4}{3} & -4 & \frac{4}{3} \\ -\frac{8}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} \left(\frac{32}{9} \vec{i}, -\frac{32}{9} \vec{j}, -\frac{64}{9} \vec{k} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1024 + 1024 + 4096}{81}} = 4\sqrt{35} u^2$$

Halla las ecuaciones paramétricas de una recta sabiendo que corta a la recta r de ecuación $x = y = z$, es paralela al plano π de ecuación $3x + 2y - z = 4$ y pasa por el punto $A(1, 2, -1)$.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



Cualquier punto B de la recta $r \equiv x = y = z$, será: $B = (t, t, t)$. Calculamos el vector director de la recta que buscamos que será $\vec{AB} = (t-1, t-2, t+1)$. Como la recta que buscamos tiene que ser paralela al plano $3x + 2y - z = 4$, el vector \vec{AB} y el vector normal del plano $\vec{n} = (3, 2, -1)$ serán perpendiculares, luego su producto escalar valdrá cero.

$$\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (t-1, t-2, t+1) \cdot (3, 2, -1) = 0 \Rightarrow 4t - 8 = 0 \Rightarrow t = 2$$

Luego la recta que nos piden pasa por $A(1, 2, -1)$ y su vector director es $\vec{AB} = (1, 0, 3)$, luego su

ecuación paramétrica será: $s \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -1 + 3t \end{cases}$

Determina los puntos de la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \frac{z - 3}{2} \end{cases}$ que equidistan del plano π de ecuación $x + z = 1$ y del plano π' de ecuación $y - z = 3$.
MATEMÁTICAS II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta r a paramétricas $\begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \frac{z - 3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ y por tanto podemos tomar como

punto genérico de la recta $P = (0, 1 + t, 3 + 2t)$.

Como piden los puntos que equidistan de los planos π y π' , tenemos que $d(P, \pi) = d(P, \pi')$, luego:

$$d(P, \pi) = d(P, \pi') \Rightarrow \frac{|0 + 3 + 2t - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|1 + t - 3 - 2t - 3|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{|2 + 2t|}{\sqrt{2}} = \frac{|-5 - t|}{\sqrt{2}} \Rightarrow |2 + 2t| = |-5 - t|$$

de donde salen las ecuaciones:

$$2 + 2t = -5 - t \Rightarrow t = -\frac{7}{3} \Rightarrow P = \left(0, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

$$2 + 2t = 5 + t \Rightarrow t = 3 \Rightarrow P = (0, 4, 9)$$

Considera los puntos $A(1,0,-2)$ y $B(-2,3,1)$

a) Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en tres partes iguales

b) Calcula el área del triángulo de vértices A , B y C , donde C es un punto de la recta de ecuación $-x = y - 1 = z$. ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto C ?

MATEMÁTICAS II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



Observamos la siguiente igualdad entre vectores $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM}$, y como $\overrightarrow{AB} = (-3, 3, 3)$ y $\overrightarrow{AM} = (x-1, y, z+2)$, obtenemos: $(-3, 3, 3) = (3x-3, 3y, 3z+6) \Rightarrow x=0; y=1; z=-1$, es decir el punto M es $M = (0, 1, -1)$

También se observa que el punto N es el punto medio del segmento MB , es decir:

$$N = \frac{M+B}{2} = \left(\frac{0-2}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{1-1}{2} \right) = (-1, 2, 0)$$

b) Antes de calcular el área del triángulo de vértices A , B y C escribimos la recta r en forma

$$\text{paramétrica } r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}$$

Cualquier punto C de la recta r tiene de coordenadas $C = (-t, 1+t, t)$. Calculamos los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} .

$$\overrightarrow{AB} = (-3, 3, 3) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (-t-1, 1+t, t+2)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 3 \\ -t-1 & 1+t & t+2 \end{vmatrix} = (3t+6)\vec{i} + (-3t-3)\vec{j} - (3t+3)\vec{k} - (3+3t)\vec{i} + (3t+6)\vec{j} - (-t-1)\vec{k} = (3, 3, 0)$$

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{9+9+0} = \frac{3\sqrt{2}}{2} u^2$$

Vemos que el área no depende del parámetro t , luego no depende de la elección del punto C .