EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2007

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

Considera los planos de ecuaciones: $x - y + z = 0$ y $x + y - z = 2$
a) Determina la recta que pasa por el punto $A(1,2,3)$ y no corta a ninguno de los planos dados.
b) Determina los puntos que equidistan de $A(1,2,3)$ y $B(2,1,0)$ y pertenecen a la recta intersección de los planos dados.
MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La recta debe ser paralela a la recta intersección de los dos planos. Calculamos, por tanto, el vector director de dicha recta.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} + \vec{k} + \vec{j} - \vec{i} = (0,2,2)$$

Luego, la ecuación de la recta pedida en forma paramétrica será: $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{array} \right.$

b) Las coordenadas de cualquier punto de la recta intersección de los dos planos, será:

$$\left. \begin{array}{r} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = t \end{array} \right\} \Rightarrow C(1, 1+t, t)$$

Los módulos de los vectores $\vec{AC} = (0, t-1, t-3)$ y $\vec{BC} = (-1, t, t)$, tienen que ser iguales, luego:

$$\sqrt{0^2 + (t-1)^2 + (t-3)^2} = \sqrt{(-1)^2 + t^2 + t^2} \Rightarrow t^2 + 1 - 2t + t^2 + 9 - 6t = 1 + t^2 + t^2 \Rightarrow t = \frac{9}{8}$$

Luego, el punto pedido es: $C\left(1, \frac{17}{8}, \frac{9}{8}\right)$

Considera los puntos $A(0,3,-1)$ y $B(0,1,5)$.
a) Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC de vértices $A(0,3,-1)$, $B(0,1,5)$ y $C(x,4,3)$ tiene un ángulo recto en C.
b) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $(0,1,5)$ y $(3,4,3)$ y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$.
MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Como el ángulo recta está en C, los vectores $\vec{CA}$ y $\vec{CB}$, son perpendiculares, luego su producto escalar vale cero.

$$\vec{CA}=(-x,-1,-4)$$
$$\vec{CB}=(-x,-3,2)$$
$$\vec{CA}\cdot\vec{CB}=0 \Rightarrow (-x,-1,-4)\cdot(-x,-3,2)=0 \Rightarrow x^2+3-8=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$$

b) Calculamos el vector director de la recta.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{j}+\vec{k}+2\vec{k}-\vec{i}=(-1,2,3)$$

Calculamos el vector que une los puntos $(0,1,5)$ y $(3,4,3)$.

$$\vec{u}=(3,4,3)-(0,1,5)=(3,3,-2)$$

El plano que nos piden viene definido por el punto $(0,1,5)$ y los vectores $\vec{u}=(3,3,-2)$ y $\vec{v}=(-1,2,3)$

$$\begin{vmatrix} x-0 & 3 & -1 \\ y-1 & 3 & 2 \\ z-5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 9x+6z-30+2y-2+3z-15-9y+9+4x=13x-7y+9z-38=0$$

Sea r la recta definida por $\frac{x-2}{3}=\frac{y-k}{4}=\frac{z}{5}$ y s la recta definida por $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{3}$
a) Halla k sabiendo que las rectas r y s se cortan en un punto.
b) Determina la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y vector director de cada recta.

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-k}{4}=\frac{z}{5} \Rightarrow A=(2,k,0) \ ; \ \vec{u}=(3,4,5)$$
$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{3} \Rightarrow B=(-2,1,3) \ ; \ \vec{v}=(-1,2,3)$$

Las rectas se cortan si el determinante de $\vec{AB}=(-4,1-k,3)$; $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vale cero, luego:

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 1-k & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 14k+8=0 \Rightarrow k=-\frac{4}{7}$$

b) El plano viene definido por el punto B y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 3 & -1 \\ y-1 & 4 & 2 \\ z-3 & 5 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x-7y+5z-6=0$$

Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $x+2y+3z-1=0$ que corta perpendicularmente a la recta definida por $\begin{cases} x = 2z+4 \\ y = 2z+3 \end{cases}$ en el punto $(2,1,-1)$.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

La ecuación de todos los planos perpendiculares a la recta que nos dan es: $2x+2y+z+D=0$.

El que pasa por el punto $(2,1,-1)$, es: $2\cdot 2+2\cdot 1-1+D=0 \Rightarrow D=-5 \Rightarrow 2x+2y+z-5=0$.

La recta que nos piden viene dada por la intersección del plano que nos dan y del plano que hemos calculado, luego su ecuación será:

$$\begin{cases} x+2y+3z-1=0 \\ 2x+2y+z-5=0 \end{cases}$$

Considera la recta r definida por $\frac{x-1}{\alpha}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{2}$ y el plano π de ecuación $2x-y+\beta z=0$.
Determina α y β en cada uno de los siguientes casos:
a) La recta r es perpendicular al plano π.
b) La recta r está contenida en el plano π.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta es perpendicular al plano, el vector director de la recta y el vector normal del plano son paralelos, luego, sus componentes son proporcionales.

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{-1}=\frac{2}{\beta}\Rightarrow \alpha=-8\ ;\ \beta=-\frac{1}{2}$$

b) Para que la recta r esté contenida en el plano π, el punto de la recta debe pertenecer al plano y el vector director de la recta y el vector normal del plano deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe valer 0.

Sustituimos el punto en la ecuación del plano.

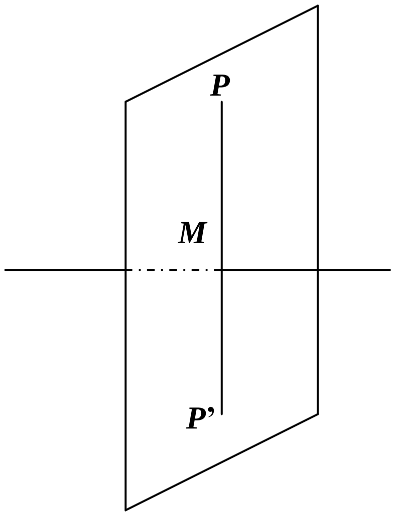
$$2\cdot 1-0+\beta\cdot 1=0\Rightarrow \beta=-2$$

El producto escalar de los vectores $(\alpha,4,2)$ y $(2,-1,-2)$ debe valer cero, luego:

$$\alpha\cdot 2+4\cdot(-1)+2\cdot(-2)=0\Rightarrow \alpha=4$$

Calcula la distancia del punto $P(1,-3,7)$ a su punto simétrico respecto de la recta definida por
$$\left.\begin{array}{r}3x-y-z-2=0\\ x+y-z+6=0\end{array}\right\}$$
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto P es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego:

$$\text{Vector normal del plano = vector director de la recta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2,2,4)$$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $2x+2y+4z+D=0$. Como nos interesa el que pasa por el punto $P(1,-3,7)$

$$2\cdot 1+2\cdot(-3)+4\cdot 7+D=0 \Rightarrow D=-24 \Rightarrow 2x+2y+4z-24=0 \Rightarrow x+y+2z-12=0$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello pasamos la recta a paramétricas y sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$\left.\begin{array}{r}3x-y-z-2=0\\ x+y-z+6=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=0+2t\\ y=-4+2t\\ z=2+4t\end{array}\right.$$

$$2t-4+2t+4+8t-12=0 \Rightarrow t=1$$

luego las coordenadas del punto M son: $M\,(2,-2,6)$

$$\vec{PM}=(1,1,-1) \Rightarrow d(P,M)=\left|\vec{PM}\right|=\sqrt{3} \Rightarrow d(P,P')=2\left|\vec{PM}\right|=2\sqrt{3}\ u$$

Encuentra la ecuación de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a los planos π_1 de ecuación $x+y+z=3\sqrt{3}$ y π_2 de ecuación $-x+y+z=2$.
b) Halla la distancia de la recta r al plano π_1.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El vector director de la recta es el producto vectorial de los vectores normales de dichos planos, luego:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0,-2,2)$$

por lo tanto, la ecuación de la recta pedida es: $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{2}$

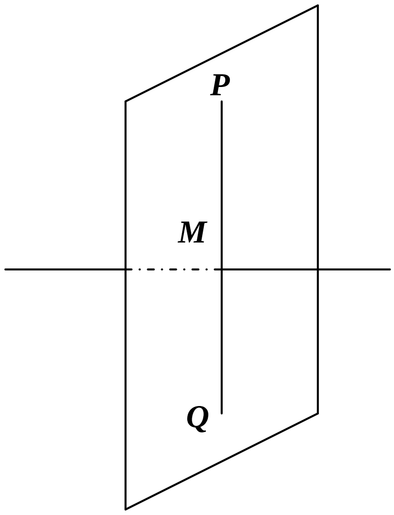
b) El vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano π_1, por lo tanto, la recta y el plano son paralelos con lo cual la distancia de la recta al plano es la distancia de cualquier punto de la recta (el origen) al plano, es decir:

$$d(O,\pi_1)=\frac{0+0+0+3\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=3u$$

Considera el punto $P(1,0,-2)$ y la recta r definida por $\begin{cases} 2x-y=5 \\ 2x+y-4z=7 \end{cases}$

a) Determina la recta perpendicular a *r* que pasa por *P*.
b) Halla la distancia entre el punto *P* y su simétrico *Q* respecto de la recta *r*.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto *P* es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego:

$$\text{Vector normal del plano} = \text{vector director de la recta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (4,8,4)$$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $4x+8y+4z+D=0$. Como nos interesa el que pasa por el punto $P(1,0,-2)$

$$4\cdot 1+8\cdot 0+4\cdot(-2)+D=0 \Rightarrow D=4 \Rightarrow 4x+8y+4z+4=0 \Rightarrow x+2y+z+1=0$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (*M*); para ello pasamos la recta a paramétricas y sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$\left.\begin{matrix} 2x-y=5 \\ 2x+y-4z=7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=3+t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases}$$

$$3+t+2\cdot(1+2t)+t+1=0 \Rightarrow t=-1$$

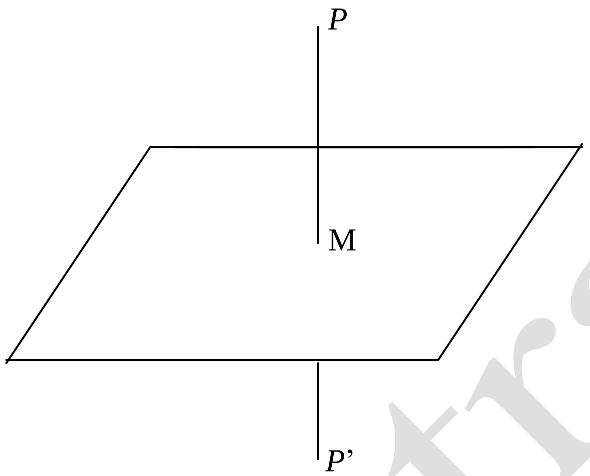
luego las coordenadas del punto *M* son: $M(2,-1,-1)$

La ecuación de la recta pedida es: $\dfrac{x-1}{2-1}=\dfrac{y-0}{-1-0}=\dfrac{z+2}{-1+2} \Rightarrow \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-0}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$

b) $\vec{PM}=(1,-1,1) \Rightarrow d(P,M)=\left|\vec{PM}\right|=\sqrt{3} \Rightarrow d(P,Q)=2\left|\vec{PM}\right|=2\sqrt{3}\ u$

Considera el plano π de ecuación $2x+2y-z-6=0$ y el punto $P(1,0,-1)$.
a) Calcula la recta que pasa por el punto *P* y es perpendicular al plano π.
b) Encuentra el punto simétrico de *P* respecto del plano π
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto *P* es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego:

Vector normal del plano = vector director de la recta = $(2,2,-1)$

La ecuación paramétrica de la recta será: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=-1-t \end{cases}$

b) Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$2\cdot(1+2t)+2\cdot 2t-1\cdot(-1-t)-6=0 \Rightarrow t=\frac{1}{3}$$

luego las coordenadas del punto *M* son: $x=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}; y=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}; z=-1-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$

Como el punto *M* es el punto medio del segmento *P P*', si llamamos (*a*,*b*,*c*) a las coordenadas del punto *P*', se debe verificar que:

$$\frac{1+a}{2}=\frac{5}{3}; a=\frac{7}{3}\ ;\ \frac{0+b}{2}=\frac{2}{3}; b=\frac{4}{3}\ ;\ \frac{-1+c}{2}=-\frac{4}{3}; c=-\frac{5}{3}$$

Considera el plano π de ecuación $2x+2y-z-6=0$ y la recta r definida por $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$
a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas.
b) Calcula, razonadamente, la distancia de la recta r al plano π.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la ecuación del plano a segmentaria

$$2x+2y-z-6=0 \Rightarrow \frac{2x}{6}+\frac{2y}{6}+\frac{z}{-6}=1 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-6}=1$$

Luego, los puntos de corte del plano con los ejes coordenados son:

$$A(3,0,0);\ B(0,3,0)\ y\ C(0,0,-6)$$

Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}=(-3,3,0)$ y $\overrightarrow{AC}=(-3,0,-6)$ y calculamos su producto vectorial:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -6 \end{vmatrix} = (-18,-18,9)$$

$$S=\frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{18^2+18^2+9^2}=\frac{27}{2}\ u^2$$

b) La recta y el plano son paralelos ya que el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares. Luego, calculamos la distancia de un punto de la recta $(1,-1,0)$ al plano.

$$d=\frac{|2\cdot 1+2\cdot(-1)-1\cdot 0-6|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=2\ u$$

a) Halla los dos puntos que dividen al segmento de extremos $A(1,2,1)$ y $B(-1,0,3)$ en tres partes iguales
b) Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio.
MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

Observamos la siguiente igualdad entre vectores $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AM}$, y como $\overrightarrow{AB}=(-2,-2,2)$ y $\overrightarrow{AM}=(x-1,y-2,z-1)$, obtenemos: $(-2,-2,2)=(3x-3,3y-6,3z-3)\Rightarrow x=\frac{1}{3};\, y=\frac{4}{3};\, z=\frac{5}{3}$, es decir el punto M es $M=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$

También se observa que el punto N es el punto medio del segmento MB, es decir:

$$N=\frac{M+B}{2}=\left(\frac{\frac{1}{3}-1}{2},\frac{\frac{4}{3}+0}{2},\frac{\frac{5}{3}+3}{2}\right)=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$$

b) El vector normal del plano es el vector $\overrightarrow{AB}=(-2,-2,2)$ y pasa por el punto $\frac{A+B}{2}=(0,1,2)$, luego, su ecuación será:

$$-2x-2y+2z+D=0\Rightarrow -2\cdot 0-2\cdot 1+2\cdot 2+D=0\Rightarrow D=-2$$

$$-2x-2y+2z-2=0\Rightarrow -x-y+z-1=0$$

Considera los vectores $\vec{u}=(1,1,m)$, $\vec{v}=(0,m,-1)$ y $\vec{w}=(1,2m,0)$.

a) Determina el valor de m para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.

b) Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, expresa el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Para que los vectores sean linealmente dependientes su determinante tiene que ser 0, es decir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix} = -1-m^2+2m=0 \Rightarrow m=1$$

b)

$$\vec{w}=a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v} \Rightarrow (1,2,0)=a\cdot(1,1,1)+b\cdot(0,1,-1) \Rightarrow \begin{cases} 1=a \\ 2=a+b \Rightarrow a=1 \ ; \ b=1 \\ 0=a-b \end{cases}$$

Luego, la combinación lineal es: $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$