

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Se considera la recta r definida por $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$ y la recta s definida por $s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu - 1 \\ z = -1 \end{cases}$. Halla la

ecuación de la recta perpendicular común a r y s .

MATEMÁTICAS II. 2009. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $A = (1, 1, \lambda - 2)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (\mu, \mu - 1, -1)$.

El vector \vec{AB} tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (\mu - 1, \mu - 2, -\lambda + 1)$

Como el vector \vec{AB} tiene que ser perpendicular a la recta r y s se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 &\Rightarrow -\lambda + 1 = 0 \\ \vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 &\Rightarrow \mu - 1 + \mu - 2 = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $\lambda = 1$ y $\mu = \frac{3}{2}$.

Luego, la recta que nos piden pasa por el punto $A = (1, 1, -1)$ y su vector director es el $\vec{AB} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) = (1, -1, 0)$

La perpendicular común tiene de ecuación: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0}$

$$\text{Otra forma: } r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = (1, 1, -2) \\ \vec{u} = (0, 0, 1) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu - 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (0, -1, -1) \\ \vec{v} = (1, 1, 0) \end{cases}$$

$$\text{Calculamos el vector } \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)$$

$$\text{Calculamos el plano determinado por } (A, \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z+2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x + y - 2 = 0$$

$$\text{Calculamos el plano determinado por } (B, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y+1 & 1 & 1 \\ z+1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = z + 1 = 0$$

Luego, la perpendicular común es: $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$

Considera la recta r definida por $\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$ y la recta s que pasa por los puntos $A(2,1,0)$ y $B(1,0,-1)$.

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas.

b) Determina un punto C de la recta r tal que los segmentos \overline{CA} y \overline{CB} sean perpendiculares.

MATEMÁTICAS II. 2009. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a) Calculamos las ecuaciones implícitas de la recta s .

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

Formamos el sistema con las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \\ x - y = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$ y calculamos el rango de la

matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema. Como sale que el rango(A) = 3 y el rango (M) = 3, las dos rectas son secantes.

b) Cualquier punto C tiene de coordenadas $C(2-t, t, -t)$. Calculamos los vectores $\vec{CA} = (t, 1-t, t)$ y $\vec{CB} = (-1+t, -t, -1+t)$, y como tienen que ser perpendiculares, tenemos:

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0 \Rightarrow 3t^2 - 3t = 0 \Rightarrow t = 0 ; t = 1$$

Luego el punto C puede ser: $C(2,0,0)$; $C(1,1,-1)$

Considera el punto $A(1, -2, 1)$ y la recta r definida por las ecuaciones $\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 2x + y + z = 7 \end{array} \right\}$

- a) Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por A .
b) Calcula la distancia del punto A a la recta r .

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta r a paramétricas $r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y + z = 7 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -3 + t \\ z = t \end{cases}$

El plano tiene como vector normal el vector director de la recta $(-1, 1, 1)$, luego, su ecuación será:

$$-x + y + z + D = 0$$

y, como debe pasar por el punto $A = (1, -2, 1)$, se debe cumplir:

$$-1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D = 2$$

Por lo tanto, el plano pedido tendrá de ecuación:

$$-x + y + z + 2 = 0$$

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano

$$-(5-t) + (-3+t) + t + 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow P = (3, -1, 2)$$

La distancia es el módulo del vector \vec{PA} , luego:

$$|\vec{PA}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} u$$

Considera la recta r definida por $\left. \begin{array}{l} y = -1 \\ 2x - z = 2 \end{array} \right\}$ y la recta s definida por $\left. \begin{array}{l} x = 4 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{array} \right\}$.

Halla la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s .

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el haz de planos de la recta r :

$$y + 1 + k(2x - z - 2) = 0 \Rightarrow 2kx + y - kz + 1 - 2k = 0$$

Si la recta s es paralela al plano el producto escalar del vector director de la recta $\vec{u} = (3, -1, 4)$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (2k, 1, -k)$ debe valer cero.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2k - 1 \cdot 1 - 4 \cdot k = 0 \Rightarrow 2k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Luego, el plano pedido es: $y + 1 + \frac{1}{2}(2x - z - 2) = 0 \Rightarrow 2x + 2y - z = 0$

Considera el punto $P(1,0,-2)$, la recta r definida por $\left. \begin{array}{l} x-2y-1=0 \\ y+z-2=0 \end{array} \right\}$ y el plano π de ecuación

$$2x + y + 3z - 1 = 0.$$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por P , es paralelo a r y es perpendicular a π .

b) Halla la ecuación de la recta que pasa por P , corta a r y es paralela a π .

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$a) r \equiv \left. \begin{array}{l} x-2y-1=0 \\ y+z-2=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A = (5, 0, 2) \\ \vec{u} = (-2, -1, 1) \end{cases}$$

El plano que nos piden viene definido por $P(1,0,-2)$, $\vec{u} = (-2,-1,1)$ y $\vec{n} = (2,1,3)$, luego:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ y & -1 & 1 \\ z+2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-2y-1=0$$

b) Cualquier punto de la recta r tiene de coordenadas $A(5-2t, 2-t, t)$. El vector $\vec{PA} = (4-2t, 2-t, t+2)$ tiene que ser perpendicular al vector $\vec{n} = (2,1,3)$, luego, su producto escalar vale cero.

$$\vec{PA} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (4-2t, 2-t, t+2) \cdot (2,1,3) = 0 \Rightarrow 8-4t+2-t+3t+6=0 \Rightarrow t=8$$

La ecuación de la recta que nos piden es: $\frac{x-1}{-12} = \frac{y}{-6} = \frac{z+2}{10}$

Considera el plano π de ecuación $3x - 2y - 2z = 7$ y la recta r definida por $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$

a) Determina la ecuación del plano paralelo a π que contiene a r .

b) Halla la ecuación del plano ortogonal a π que contiene a r .

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$a) r \equiv \left. \begin{aligned} \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2} &\Rightarrow x-2y-4=0 \\ &x-z=0 \end{aligned} \right\}$$

Calculamos el haz de planos que contiene a la recta r

$$x-2y-4+k(x-z)=0 \Rightarrow (1+k)x-2y-kz-4=0$$

Como queremos el plano paralelo a π , los vectores normales deben ser paralelos, es decir:

$$\frac{1+k}{3} = \frac{-2}{-2} = \frac{-k}{-2} \Rightarrow k=2 \Rightarrow 3x-2y-2z-4=0$$

b) Los vectores normales son perpendiculares, luego, su producto escalar es cero.

$$(1+k, -2, -k) \cdot (3, -2, -2) = 0 \Rightarrow 3+3k+4+2k=0 \Rightarrow k = -\frac{7}{5}$$

Luego, el plano pedido es:

$$\left(1-\frac{7}{5}\right)x-2y+\frac{7}{5}z-4=0 \Rightarrow 2x+10y-7z+20=0$$

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,1,-1)$, paralela al plano de ecuación $x - y + z = 1$ y corta al eje Z.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 3. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Un punto del eje Z tendrá de coordenadas $B(0,0,a)$. Si la recta es paralela al plano, el producto escalar del vector director de la recta $\vec{AB} = (-1, -1, a+1)$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (1, -1, 1)$ debe valer cero.

$$\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (a+1) = 0 \Rightarrow a = -1$$

Luego, la recta tiene de ecuación: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0}$

Sea la recta r definida por $\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{array} \right\}$

a) Determina la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1,1,1)$.

b) Halla los puntos de r cuya distancia al origen es de 4 unidades.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 3. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El vector normal del plano que nos piden es el vector director de la recta $\vec{n} = (2, -3, -6)$. Luego la ecuación de todos los planos perpendiculares a r es: $2x - 3y - 6z + D = 0$.

Como queremos el que pasa por el punto $P(1,1,1)$, tenemos que:

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D = 7 \Rightarrow 2x - 3y - 6z + 7 = 0$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = t \\ y = -\frac{3}{2}t \\ z = -3t \end{array} \right\}$$

Cualquier punto de la recta tendrá de coordenadas $A\left(t, -\frac{3t}{2}, -3t\right)$ y sabemos que su distancia al origen debe ser de 4 unidades, luego:

$$\sqrt{(t-0)^2 + \left(-\frac{3t}{2}-0\right)^2 + (-3t-0)^2} = 4 \Rightarrow \sqrt{t^2 + \frac{9t^2}{4} + 9t^2} = 4 \Rightarrow t = \pm \frac{8}{7}$$

Luego, los puntos son: $A\left(\frac{8}{7}, -\frac{12}{7}, -\frac{24}{7}\right)$ y $B\left(-\frac{8}{7}, \frac{12}{7}, \frac{24}{7}\right)$

Sean la recta r definida por $\left. \begin{array}{l} x - y = -2 \\ x - z = -3 \end{array} \right\}$ y la recta s definida por $\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ 2y - z = -2 \end{array} \right\}$.

a) Estudia la posición relativa de r y s .

b) Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r .

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$r \equiv \left. \begin{array}{l} x - y = -2 \\ x - z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = (0, 2, 3) \\ \vec{u} = (1, 1, 1) \end{array} \right.$$

$$s \equiv \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ 2y - z = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = (1, 0, 2) \\ \vec{v} = (0, 1, 2) \end{array} \right.$$

Calculamos el vector $\vec{AB} = (1, -2, -1)$. Como el rango de $(\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 3$, las rectas se cruzan.

b) Calculamos el haz de planos de la recta s :

$$x - 1 + k(2y - z + 2) = 0 \Rightarrow x + 2ky - kz - 1 + 2k = 0$$

Si la recta r es paralela al plano el producto escalar del vector director de la recta $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (1, 2k, -k)$ debe valer cero.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow 1 + 2k - k = 0 \Rightarrow k = -1$$

Luego, el plano pedido es: $x - 1 + (-1)(2y - z + 2) = 0 \Rightarrow x - 2y + z - 3 = 0$

Sea el punto $P(2, 3, -1)$ y la recta r definida por

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 1 \\ x - 2y - 4z = 1 \end{array} \right\}$$

- a) Halla la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r .
b) Halla el punto de r que está más cerca de P .

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos el haz de planos de la recta r :

$$x + y + 2z - 1 + k(x - 2y - 4z - 1) = 0$$

Como tiene que pasar por el punto P .

$$2 + 3 - 2 - 1 + k(2 - 6 + 4 - 1) = 0 \Rightarrow k = 2$$

Luego, el plano pedido es:

$$x + y + 2z - 1 + 2(x - 2y - 4z - 1) = 0 \Rightarrow 3x - 3y - 6z - 3 = 0 \Rightarrow x - y - 2z - 1 = 0$$

- b) Calculamos la ecuación del plano perpendicular a r .

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = (0, 6, -3) \Rightarrow 6y - 3z + D = 0$$

El plano perpendicular a r y que pasa por P será: $6 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) + D = 0 \Rightarrow D = -21 \Rightarrow 2y - z - 7 = 0$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 1 \\ x - 2y - 4z = 1 \\ 2y - z - 7 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow B\left(1, \frac{14}{5}, -\frac{7}{5}\right)$$

Considera el punto $P(1,0,0)$, la recta r definida por $x-3 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2}$ y la recta s definida por

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, 2, 0).$$

a) Estudia la posición relativa de r y s .

b) Halla la ecuación del plano que pasando por P es paralelo a r y s .

MATEMÁTICAS II. 2009. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$r \equiv x-3 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} A = (3, 0, -1) \\ \vec{u} = (1, 2, -2) \end{cases}$$

$$s \equiv (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, 2, 0) \Rightarrow \begin{cases} B = (1, 1, 0) \\ \vec{v} = (-1, 2, 0) \end{cases}$$

Calculamos el vector $\vec{AB} = (-2, 1, 1)$. Como el rango de $(\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 3$, las rectas se cruzan.

b) El plano viene definido por (P, \vec{u}, \vec{v}) , luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y & 2 & 2 \\ z & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + y + 2z - 2 = 0$$

Considera la recta r definida por $\left. \begin{array}{l} x - y + 3 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{array} \right\}$ y la recta s definida por $\left. \begin{array}{l} 2y + 1 = 0 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{array} \right\}$.

- a) Determina la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s .
b) ¿Existe algún plano que contenga a r y sea perpendicular a s ? Razona la respuesta.
MATEMÁTICAS II. 2009. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el haz de planos de la recta r :

$$x - y + 3 + k(x + y - z - 1) = 0 \Rightarrow (1+k)x + (-1+k)y - kz + 3 - k = 0$$

Si la recta s es paralela al plano el producto escalar del vector director de la recta $\vec{u} = (2, 0, 1)$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (1+k, -1+k, -k)$ debe valer cero.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow 2 \cdot (1+k) + 0 \cdot (-1+k) + 1 \cdot (-k) = 0 \Rightarrow 2+k = 0 \Rightarrow k = -2$$

Luego, el plano pedido es: $x - y + 3 - 2(x + y - z - 1) = 0 \Rightarrow -x - 3y + 2z + 5 = 0$

b) Si existe ese plano, el vector director de la recta $\vec{u} = (2, 0, 1)$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (1+k, -1+k, -k)$ deben ser paralelos, luego se debe cumplir que:

$$\frac{1+k}{2} = \frac{-1+k}{0} = \frac{-k}{1} \Rightarrow \text{No tiene solución, luego, no existe ese plano.}$$