PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2013

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Sea r la recta que pasa por el punto $(1,0,0)$ y tiene como vector dirección $(a,2a,1)$ y sea s la recta dada por: $s \equiv \begin{cases} -2x+y=-2 \\ -ax+z=\quad 0 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a para los que r y s son paralelas.
b) Calcula, para $a=1$, la distancia entre r y s.
MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector director de la recta s.

$$s \equiv \begin{cases} -2x+y=-2 \\ -ax+z=\quad 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-2+2t \\ z=at \end{cases} \Rightarrow \vec{u}(1,2,a)$$

Como las rectas son paralelas, las componentes de los vectores directores de ambas rectas deben ser proporcionales

$$\frac{a}{1}=\frac{2a}{2}=\frac{1}{a} \Rightarrow a=\pm 1$$

b) Como las rectas son paralelas, su distancia viene dada por la distancia del punto $A=(1,0,0)$ a la recta s. Para ello calculamos un plano perpendicular a s y que pase por el punto $A=(1,0,0)$

$$x+2y+z+D=0 \Rightarrow 1+2\cdot 0+0+D=0 \Rightarrow D=-1 \Rightarrow x+2y+z-1=0$$

Calculamos el punto de corte del plano con la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z-1=0 \\ x=t \\ y=-2+2t \\ z=t \end{array}\right\} \Rightarrow t+2(-2+2t)+t-1=0 \Rightarrow 6t-5=0 \Rightarrow t=\frac{5}{6}$$

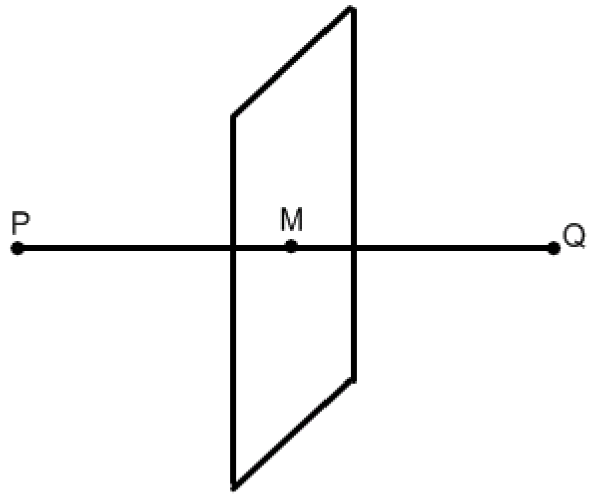
Luego, el punto de corte es el $B=\left(\frac{5}{6},-2+\frac{10}{6},\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{5}{6},-\frac{2}{6},\frac{5}{6}\right)$. La distancia entre las rectas viene dada por el módulo del vector $\vec{AB}=\left(\frac{5}{6}-1,-\frac{2}{6},\frac{5}{6}\right)=\left(-\frac{1}{6},-\frac{2}{6},\frac{5}{6}\right)$, luego:

$$d=\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2+\left(-\frac{2}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{30}{36}}=\sqrt{\frac{5}{6}}\ u$$

Considera los puntos $P(2,3,1)$ y $Q(0,1,1)$.
a) Halla la ecuación del plano π respecto del cual P y Q son simétricos.
b) Calcula la distancia de P a π.
MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano que nos piden es un plano perpendicular al segmento *PQ* y que pasa por su punto medio *M*.



El vector $\vec{PQ}=(-2,-2,0)$ es el vector normal del plano, luego:

$$-2x-2y+D=0$$

como tiene que pasar por el punto medio $M=(1,2,1)$, tenemos que el plano pedido es:

$$-2x-2y+D=0 \Rightarrow -2\cdot 1-2\cdot 2+D=0 \Rightarrow D=6 \Rightarrow -2x-2y+6=0 \Rightarrow x+y-3=0$$

b) La distancia de P a π es el módulo del vector $\vec{PM}=(-1,-1,0)$, luego:

$$d(P,\pi)=\left|\vec{PM}\right|=\sqrt{2}\ u$$

Calcula la distancia entre las rectas: $r \equiv x = y = z$ **y** $s \equiv x - 1 = y - 2 = z - 3$.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 + s \\ z = 3 + s \end{cases}$$

Vemos que las dos rectas son paralelas pues tienen el mismo vector director $\vec{u} = (1,1,1)$. Su distancia viene dada por la distancia del punto $A = (0,0,0)$ de la recta r a la recta s. Para ello calculamos un plano perpendicular a s y que pase por el punto $A = (0,0,0)$

$$x + y + z + D = 0 \Rightarrow 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow x + y + z = 0$$

Calculamos el punto de corte del plano con la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x = 1 + s \\ y = 2 + s \\ z = 3 + s \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + s + 2 + s + 3 + s = 0 \Rightarrow 3s + 6 = 0 \Rightarrow s = -2$$

Luego, el punto de corte es el $B = (1-2, 2-2, 3-2) = (-1,0,1)$. La distancia entre las rectas viene dada por el módulo del vector $\vec{AB} = (-1,0,1)$, luego:

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} \ u$$

Considera las rectas: $r \equiv x = y = z$ $\quad s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ $\quad t \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$.

Halla la ecuación de la recta que corta a *r* y a *s* y es paralela a *t*.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Si pasamos a paramétricas las rectas *r* y *s*, vemos que: cualquier punto de la recta *r* tiene de coordenadas $A = (t,t,t)$ y cualquier punto de la recta *s* tiene de coordenadas $B = (2,1,s)$.

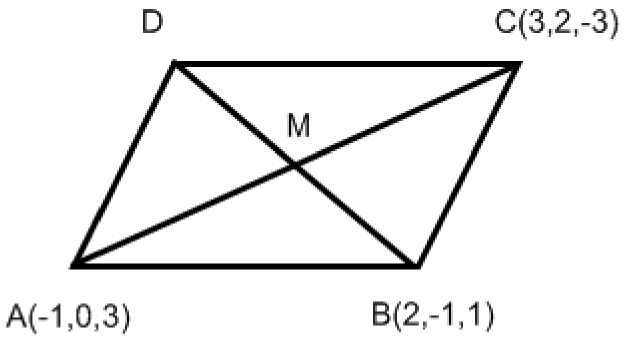
El vector $\vec{AB} = (2-t, 1-t, s-t)$ tiene que ser paralelo al vector director de la recta t $\vec{u} = (2,3,1)$, luego, sus componentes tienen que ser proporcionales:

$$\frac{2-t}{2} = \frac{1-t}{3} = \frac{s-t}{1} \Rightarrow t = 4 \ ; \ s = 3$$

Luego, la recta que nos piden tiene de ecuación: $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-4}{1}$

Del paralelogramo $ABCD$ se conocen los vértices $A(-1,0,3)$, $B(2,-1,1)$ y $C(3,2,-3)$.
a) Halla la ecuación del plano que contiene al paralelogramo.
b) Halla la ecuación de la recta que contiene a la diagonal AC del paralelogramo.
c) Calcula las coordenadas del vértice D.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



a) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(3,-1,-2)$ y $\vec{AC}=(4,2,-6)$. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 4 \\ y & -1 & 2 \\ z-3 & -2 & -6 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x+y+z-2=0$$

b) La recta que nos piden tiene de ecuación: $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-3}{-6}$

c) Calculamos las coordenadas del vértice D

$$M=\frac{A+C}{2}=\frac{(-1,0,3)+(3,2,-3)}{2}=(1,1,0)$$

$$M=\frac{B+D}{2}\Rightarrow (1,1,0)=\frac{(2,-1,1)+(a,b,c)}{2}\Rightarrow D=(0,3,-1)$$

Considera los puntos $A(1,2,3)$ y $B(-1,0,4)$.
a) Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento *AB* en tres partes iguales.
b) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto *A* y es perpendicular al segmento *AB*.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

Observamos la siguiente igualdad entre vectores $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM}$, y como $\overrightarrow{AB} = (-2,-2,1)$ y $\overrightarrow{AM} = (x-1, y-2, z-3)$, obtenemos: $(-2,-2,1) = (3x-3, 3y-6, 3z-9) \Rightarrow x = \frac{1}{3}; y = \frac{4}{3}; z = \frac{10}{3}$, es decir el punto *M* es $M = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

También se observa que el punto *N* es el punto medio del segmento *MB*, es decir:

$$N = \frac{M+B}{2} = \left(\frac{\frac{1}{3}-1}{2}, \frac{\frac{4}{3}+0}{2}, \frac{\frac{10}{3}+4}{2} \right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

b) El vector $\overrightarrow{AB} = (-2,-2,1)$ es el vector normal del plano, luego, $-2x-2y+z+D=0$. Como queremos que pase por el punto A:

$$-2x-2y+z+D=0 \Rightarrow -2\cdot 1 - 2\cdot 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = 3$$

Luego, el plano que nos piden es: $-2x-2y+z+3=0$

Considera los puntos $A(1,2,1)$, $B(-1,0,2)$ y $C(3,2,0)$ y el plano π determinado por ellos.
a) Halla la ecuación de la recta *r* que está contenida en π y tal que *A* y *B* son simétricos respecto de *r*.
b) Calcula la distancia de *A* a *r*.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Como *A* y *B* son simétricos respecto de *r*, el punto medio *M* del segmento *AB* pertenece a la recta *r*

$$M=\frac{A+B}{2}=\left(0,1,\frac{3}{2}\right)$$

Calculamos el vector normal del plano que contiene a los tres puntos

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(2,0,4)$$

El vector director (a,b,c) de la recta *r* tiene que ser perpendicular al vector normal del plano, luego:

$$2a+4c=0$$

También tiene que ser perpendicular al vector $\vec{AB}=(-2,-2,1)$, luego: $-2a-2b+c=0$. Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones sale que: $a=-2c$; $b=\frac{5c}{2}$; $c=c$. Vemos que hay infinitas soluciones, si damos a *c* el valor 2, el vector director de la recta es: $(-4,5,2)$. Por lo tanto, la ecuación de la recta que nos piden es: $\frac{x}{-4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-\frac{3}{2}}{2}$

b) La distancia de *A* a la recta *r* es el módulo del vector $\vec{AM}=\left(-1,-1,\frac{1}{2}\right)$, luego:

$$d=\left|\vec{AM}\right|=\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\ u$$

Considera las rectas *r* y *s* dadas por $r \equiv \begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 3+5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ z-5=0 \end{cases}$

a) Determina la posición relativa de *r* y *s*.
b) Calcula la distancia entre *r* y *s*.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos las ecuaciones implícitas de la recta *r*.

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} 5x-10 = 3y-9 \\ x-2 = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x-3y = 1 \\ x-3z = 2 \end{cases}$$

Formamos el sistema con las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} x+\ \ y = 1 \\ z = 5 \\ 5x-3y = 1 \\ x-3z = 2 \end{cases}$ y calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema. Como sale que el rango(A) = 3 y el rango (M) = 4, las dos rectas se cruzan.

b) Calculamos un punto y el vector director de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A = (2,3,0) \\ \vec{u} = (-3,5,1) \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} B = (1,0,5) \\ \vec{v} = (-1,1,0) \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula que nos da la distancia entre dos rectas:

$$d(r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})\right|}{\left|\vec{u}\wedge\vec{v}\right|} = \left| \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} \right| = \frac{14}{\sqrt{6}} = 5'71u$$

Determina el punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z+1$ que equidista de los planos $\pi_1 \equiv x - y + 3z + 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -4 + \lambda - 3\mu \\ y = 1 + \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta r a paramétricas $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ y por tanto podemos tomar como punto genérico de la recta $P = (1+3t, 2t, -1+t)$.

Calculamos la ecuación general del plano $\pi_2 \equiv x - y + 3z + 5 = 0$

Como piden los puntos que equidistan de los planos π_1 y π_2, tenemos que $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$, luego:

$$d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2) \Rightarrow \frac{|1+3t-2t-3+3t+2|}{\sqrt{11}} = \frac{|1+3t-2t-3+3t+5|}{\sqrt{11}} \Rightarrow \frac{|4t|}{\sqrt{11}} = \frac{|4t+3|}{\sqrt{11}} \Rightarrow |4t| = |4t+3|$$

de donde salen las ecuaciones:

$$4t = -4t - 3 \Rightarrow t = -\frac{3}{8} \Rightarrow P = \left(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{11}{8}\right)$$

$$4t = 4t + 3 \Rightarrow 3 = 0 \Rightarrow \text{ Absurdo}$$

Considera los puntos $A(0,5,3)$, $B(-1,4,3)$, $C(1,2,1)$ y $D(2,3,1)$.
a) Comprueba que los cuatro puntos son coplanarios y que *ABCD* es un rectángulo.
b) Calcula el área de dicho rectángulo.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Si los cuatro puntos están en el mismo plano eso quiere decir que los vectores $\vec{AB}, \vec{AC}$ y $\vec{AD}$ tienen que ser coplanarios, es decir, tienen que ser linealmente dependientes, luego su determinante tiene que valer 0.

Los vectores son: $\vec{AB}=(-1,-1,0)$; $\vec{AC}=(1,-3,-2)$ y $\vec{AD}=(2,-2,-2)$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Los 4 puntos están en un mismo plano.}$$

Si los cuatro puntos forman un rectángulo

Los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AD}$ tienen que ser perpendiculares $\Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{AD}=0 \Rightarrow -2+2=0 \Rightarrow$ Cierto

Los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{BC}$ tienen que ser perpendiculares $\Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{BC}=0 \Rightarrow -2+2=0 \Rightarrow$ Cierto

Los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{DC}$ tienen que tener el mismo módulo $\Rightarrow \left|\vec{AB}\right| = \left|\vec{DC}\right| = \sqrt{2} \Rightarrow$ Cierto

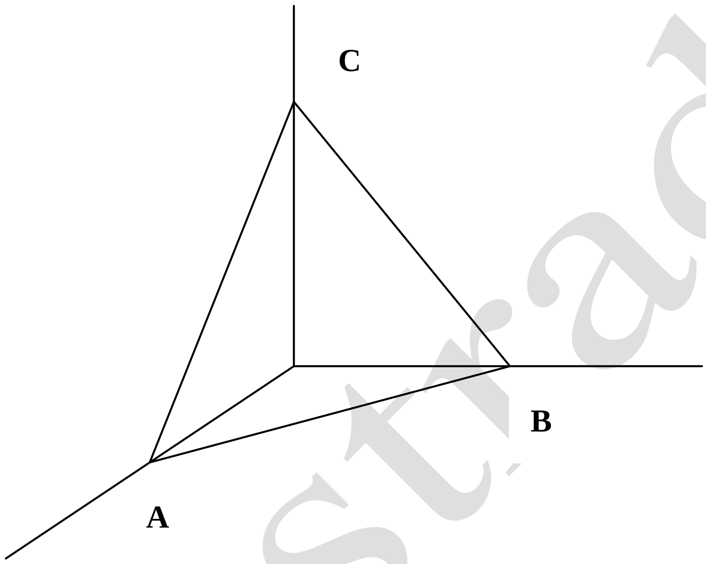
Luego forman un rectángulo.

c) Área = $\left|\vec{AB}\right| \cdot \left|\vec{AD}\right| = \sqrt{2}\cdot\sqrt{12} = 4'89\ u^2$

Considera el plano π de ecuación $2x+y+3z-6=0$.
a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.
b) Calcula el volumen del tetraedro determinado por el plano π y los planos coordenados.
MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



Los puntos de corte del plano con los ejes coordenados son: $A=(3,0,0)$; $B=(0,6,0)$ y $C=(0,0,2)$

Calculamos los vectores: $\vec{AB}=(-3,6,0)$; $\vec{AC}=(-3,0,2)$. El área pedida es:

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\ \textit{módulo}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 6 & 0\\ -3 & 0 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\textit{módulo}\ (12\vec{i}+6\vec{j}+18\vec{k})=\frac{1}{2}\sqrt{504}=\sqrt{126}=3\sqrt{14}\ u^2$$

b) Calculamos los vectores $\vec{OA}=(3,0,0)$; $\vec{OB}=(0,6,0)$ y $\vec{OC}=(0,0,2)$. El volumen del tetraedro será:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|36\right|=6\ u^3$$

Considera los puntos $A(1,0,2)$, $B(-1,3,1)$, $C(2,1,2)$ y $D(1,0,4)$.
a) Halla la ecuación del plano que contiene a A, B y C
b) Halla el punto simétrico de D respecto del plano $x-y-5z+9=0$.
MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(-2,3,-1)$; $\vec{AC}=(1,1,0)$. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ y & 3 & 1 \\ z-2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = x-y-5z+9=0$$

b) Calculamos la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{-5} \Rightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=4-5t \end{cases}$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano, sustituyendo la recta en la ecuación del plano

$$x-y-5z+9=0 \Rightarrow 1+t+t-20+25t+9=0 \Rightarrow t=\frac{10}{27}$$

luego, el punto es: $M=\left(1+\frac{10}{27},-\frac{10}{27},4-\frac{50}{27}\right)=\left(\frac{37}{27},-\frac{10}{27},\frac{58}{27}\right)$

Como el punto M es el punto medio del segmento $D\,D'$, si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto D', se debe verificar que:

$$\frac{1+a}{2}=\frac{37}{27} \Rightarrow a=\frac{47}{27}$$
$$\frac{0+b}{2}=-\frac{10}{27} \Rightarrow b=-\frac{20}{27}$$
$$\frac{4+c}{2}=\frac{58}{27} \Rightarrow c=\frac{8}{27}$$

Luego el simétrico es: $D'=\left(\frac{47}{27},-\frac{20}{27},\frac{8}{27}\right)$