

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera los puntos $P(1,0,-1)$, $Q(2,1,1)$ y la recta r dada por $x-5 = y = \frac{z+2}{-2}$.

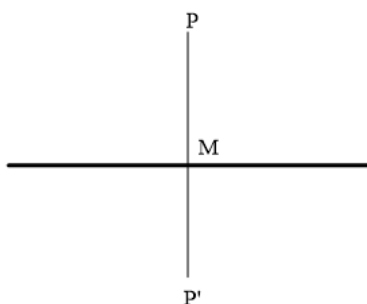
a) Determina el punto simétrico de P respecto de r .

b) Calcula el punto de r que equidista de P y Q .

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a)



Pasamos la recta a paramétricas: $x-5 = y = \frac{z+2}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 5+t \\ y = t \\ z = -2-2t \end{cases}$.

Cualquier punto de la recta tendrá de coordenadas $M(5+t, t, -2-2t)$. Queremos que el vector $\overrightarrow{PM} = (5+t-1, t-0, -2-2t+1) = (4+t, t, -1-2t)$ sea perpendicular al vector director de la recta $\vec{u} = (1, 1, -2)$, luego, su producto escalar tiene que valer cero.

$$\overrightarrow{PM} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (4+t, t, -1-2t) \cdot (1, 1, -2) = 0 \Rightarrow -6-6t = 0 \Rightarrow t = -1$$

Luego, el punto M es: $M = (4, -1, 0)$.

Si llamamos al punto simétrico $P' = (a, b, c)$, se cumple que:

$$\frac{(1, 0, -1) + (a, b, c)}{2} = (4, -1, 0) \Rightarrow P' = (7, -2, 1)$$

b) Cualquier punto A de la recta tiene de coordenadas: $A(5+t, t, -2-2t)$. Buscamos el que equidista de P y Q , por lo tanto, el módulo del vector $\overrightarrow{PA} = (4+t, t, -1-2t)$ tiene que ser igual al módulo del vector $\overrightarrow{QA} = (3+t, t-1, -3-2t)$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PA}| &= |\overrightarrow{QA}| \Rightarrow \sqrt{(4+t)^2 + t^2 + (-1-2t)^2} = \sqrt{(3+t)^2 + (t-1)^2 + (-3-2t)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 16+t^2+8t+t^2+1+4t^2+4t = 9+t^2+6t+t^2+1-2t+9+4t^2+12t \Rightarrow \\ &\Rightarrow 6t^2+12t+17 = 6t^2+16t+19 \Rightarrow -4t = 2 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Luego, el punto A de la recta que equidista de P y Q es: $A = \left(5 - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$

Considera el punto $P(2,-1,3)$ y el plano π de ecuación $3x + 2y + z = 5$.

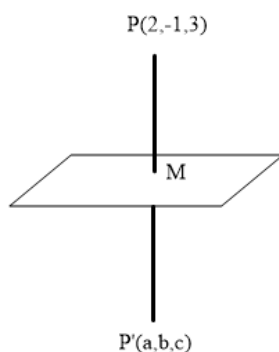
a) Calcula el punto simétrico de P respecto de π .

b) Calcula la distancia de P a π .

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



Con el vector normal del plano $\vec{n} = (3, 2, 1)$ y el punto P , calculamos la recta que pasa por P y es perpendicular al plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Calculamos el punto M , punto de corte de la recta con el plano

$$3 \cdot (2 + 3t) + 2 \cdot (-1 + 2t) + (3 + t) = 5 \Rightarrow 14t = -2 \Rightarrow t = -\frac{1}{7}$$

Luego, el punto M es: $M = \left(2 - \frac{3}{7}, -1 - \frac{2}{7}, 3 - \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7}\right)$

Calculamos las coordenadas del simétrico

$$M = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow \left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7}\right) = \frac{(2, -1, 3) + (a, b, c)}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{22}{7} = a + 2 \Rightarrow a = \frac{8}{7} \\ -\frac{18}{7} = b - 1 \Rightarrow b = -\frac{11}{7} \\ \frac{40}{7} = c + 3 \Rightarrow c = \frac{19}{7} \end{cases}$$

Luego, el punto simétrico es $P' \left(\frac{8}{7}, -\frac{11}{7}, \frac{19}{7}\right)$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{PM} = \left(\frac{11}{7} - 2, -\frac{9}{7} + 1, \frac{20}{7} - 3\right) = \left(-\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}\right)$

$$d(P, \pi) = |\vec{PM}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2 + \left(-\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{7} = 0'534 \text{ u}$$

Se considera el plano π de ecuación $x + 2y + z = 6$.

- Determina la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.
- Halla el punto simétrico del origen de coordenadas con respecto de π .
- Calcula el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos de corte de π con los ejes de coordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Con el vector normal del plano $\vec{n} = (1, 2, 1)$ y el punto $O = (0, 0, 0)$, calculamos la recta que pasa por O y es perpendicular al plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$$

b) Calculamos el punto M , punto de corte de la recta con el plano

$$1 \cdot (t) + 2 \cdot (2t) + 1 \cdot (t) = 6 \Rightarrow 6t = 6 \Rightarrow t = 1$$

Luego, el punto M es: $M = (1, 2, 1)$

Calculamos las coordenadas del simétrico

$$M = \frac{O + O'}{2} \Rightarrow (1, 2, 1) = \frac{(0, 0, 0) + (a, b, c)}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

Luego, el punto simétrico es $O'(2, 4, 2)$.

c) Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados.

Corte con el eje OX $\Rightarrow x = 6 \Rightarrow A(6, 0, 0)$

Corte con el eje OY $\Rightarrow y = 3 \Rightarrow B(0, 3, 0)$

Corte con el eje OZ $\Rightarrow z = 6 \Rightarrow C(0, 0, 6)$

El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores,

$\vec{OA} = (6, 0, 0)$; $\vec{OB} = (0, 3, 0)$; $\vec{OC} = (0, 0, 6)$, es decir:

$$V = \frac{1}{6} \text{ Valor absoluto de } \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{108}{6} = 18 \text{ u}^3$$

Considera las rectas r y s dadas por

$$r \equiv x - 2 = y - 2 = z \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 4 + t \\ z = mt \end{cases}$$

- a) Determina m para que r y s sean paralelas.
 b) Halla, si existe, un valor de m para el que ambas rectas sean la misma.
 c) Para $m = 1$, calcula la ecuación del plano que contiene a r y a s .
- MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

RESOLUCIÓN

a) Pasamos la recta r a paramétricas $r \equiv x - 2 = y - 2 = z \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow A = (2, 2, 0) ; \vec{u} = (1, 1, 1)$

$$s \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 4 + t \\ z = mt \end{cases} \Rightarrow B = (4, 4, 0) ; \vec{v} = (1, 1, m)$$

Si las rectas son paralelas, los vectores tienen que ser linealmente dependientes, es decir, sus componentes tienen que ser proporcionales.

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{m} \Rightarrow m = 1$$

b) Vemos que el punto $B = (4, 4, 0)$ de la recta s , no verifica la ecuación de la recta r

$$4 - 2 = 4 - 2 \neq 0$$

Por lo tanto, no hay ningún valor de m para el cual las rectas sean coincidentes.

c) El plano que nos piden viene definido por el punto $A = (2, 2, 0)$ y los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{AB} = (2, 2, 0)$. Luego, la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y-2 & 1 & 2 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 2y = 0 \Rightarrow x - y = 0$$

Considera las rectas r y s dadas por: $r \equiv \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$

a) Estudia y determina la posición relativa de r y s .

b) Calcula la recta perpendicular común a r y a s .

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Formamos el sistema con las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y = 7 \\ x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ y calculamos el

rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema. Como sale que el $\text{rango}(A) = 3$ y el $\text{rango}(M) = 4$, las dos rectas se cruzan.

b) Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $A = (1 + 2t, 3 - t, t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (2, -3, s)$

El vector \vec{AB} tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (1 - 2t, -6 + t, s - t)$

Como el vector \vec{AB} tiene que ser perpendicular a la recta r y s se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (1 - 2t, -6 + t, s - t) \cdot (2, -1, 1) = 0 \Rightarrow 8 - 6t + s = 0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (1 - 2t, -6 + t, s - t) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Rightarrow s - t = 0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t = \frac{8}{5}$; $s = \frac{8}{5}$

La recta que nos piden viene definida por: $A = \left(\frac{21}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right)$ y $\vec{AB} = \left(-\frac{11}{5}, -\frac{22}{5}, 0\right)$. Su ecuación es:

$$\frac{x - \frac{21}{5}}{-\frac{11}{5}} = \frac{y - \frac{7}{5}}{-\frac{22}{5}} = \frac{z - \frac{8}{5}}{0}$$

Considera los puntos $A(2, -1, -2)$ y $B(-1, -1, 2)$, y la recta r dada por $x - 1 = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 1}{2}$

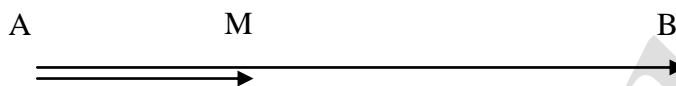
a) Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en 3 segmentos de la misma longitud.

b) Determina un punto C de r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en C .

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



Observamos la siguiente igualdad entre vectores $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM}$, y como $\overrightarrow{AB} = (-3, 0, 4)$ y $\overrightarrow{AM} = (x - 2, y + 1, z + 2)$, obtenemos: $(-3, 0, 4) = (3x - 6, 3y + 3, 3z + 6) \Rightarrow x = 1; y = -1; z = -\frac{2}{3}$, es

decir el punto M es $M = \left(1, -1, -\frac{2}{3}\right)$

También se observa que el punto N es el punto medio del segmento MB , es decir:

$$N = \frac{M + B}{2} = \left(\frac{1 - 1}{2}, \frac{-1 - 1}{2}, \frac{-\frac{2}{3} + 2}{2} \right) = \left(0, -1, \frac{2}{3} \right)$$

b) Escribimos la recta r en forma paramétrica $r \equiv x - 1 = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Cualquier punto C de la recta r tiene de coordenadas $C = (1 + t, 1 - t, 1 + 2t)$. Calculamos los vectores \overrightarrow{CB} y \overrightarrow{CA} .

$$\overrightarrow{CB} = (-2 - t, -2 + t, 1 - 2t) \text{ y } \overrightarrow{CA} = (1 - t, -2 + t, -3 - 2t)$$

El producto escalar debe valer cero ya que son perpendiculares, luego:

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \Rightarrow (-2 - t, -2 + t, 1 - 2t) \cdot (1 - t, -2 + t, -3 - 2t) = 6t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}; t = -\frac{1}{2}$$

Luego el punto C puede ser:

$$\text{Si } t = \frac{1}{3} \Rightarrow C_1 = \left(1 + \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}, 1 + \frac{2}{3} \right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3} \right)$$

$$\text{Si } t = -\frac{1}{2} \Rightarrow C_2 = \left(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, 1 - 1 \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0 \right)$$

Se sabe que los puntos $A(-1, 2, 6)$ y $B(1, 4, -2)$ son simétricos respecto de un plano π .

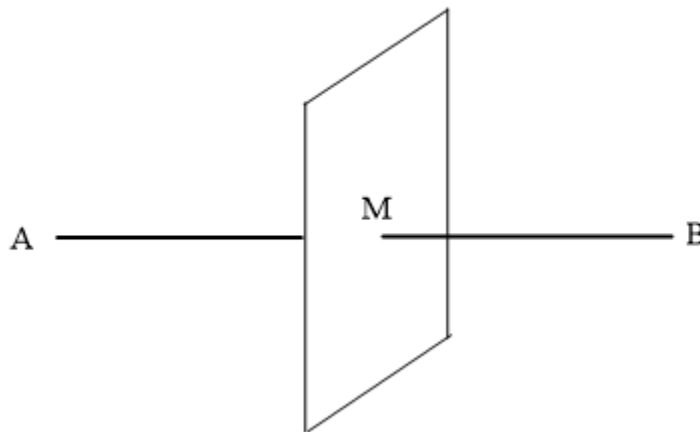
a) Calcula la distancia de A a π .

b) Determina la ecuación general del plano π .

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

b) El plano que nos piden es un plano perpendicular al segmento AB y que pasa por su punto medio M .



El vector $\vec{AB} = (2, 2, -8)$ es el vector normal del plano, luego:

$$2x + 2y - 8z + D = 0$$

como tiene que pasar por el punto medio $M = (0, 3, 2)$, tenemos que el plano pedido es:

$$2x + 2y - 8z + D = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 8 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D = 10 \Rightarrow 2x + 2y - 8z + 10 = 0 \Rightarrow x + y - 4z + 5 = 0$$

a) La distancia de A a π es el módulo del vector $\vec{AM} = (1, 1, -4)$, luego:

$$d(A, \pi) = \left| \vec{AM} \right| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} \text{ u}$$

Considera las rectas r y s dadas por $r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$

a) Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s .

b) Calcula la distancia entre las rectas dadas.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 - s \\ y = s \\ z = 2 \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $A = (2t, 1, 0)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (2 - s, s, 2)$

El vector \vec{AB} tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (2 - s - 2t, s - 1, 2)$

Como el vector \vec{AB} tiene que ser perpendicular a la recta r y s se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (2 - s - 2t, s - 1, 2) \cdot (1, 0, 0) = 0 \Rightarrow 2 - s - 2t = 0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (2 - s - 2t, s - 1, 2) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \Rightarrow -2 + s + 2t + s - 1 = 0 \Rightarrow 2s + 2t - 3 = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que: $t = \frac{1}{2}$; $s = 1$

Luego, los puntos A y B que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = (1, 1, 0) ; B = (1, 1, 2)$$

a) La recta que nos piden viene definida por: $A = (1, 1, 0)$ y $\vec{AB} = (0, 0, 2)$. Su ecuación es:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{2}$$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{AB} = (0, 0, 2)$

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + 2^2} = 2$$

Sea r la recta que pasa por los puntos $A(3,6,7)$ y $B(7,8,3)$ y sea s la recta dada por

$$\begin{cases} x - 4y - z = -10 \\ 3x - 4y + z = -2 \end{cases}$$

a) Determina la posición relativa de r y s .

b) Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

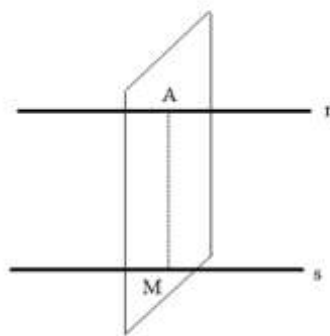
a) Calculamos las ecuaciones implícitas de la recta r . $\frac{x-3}{4} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-7}{-4} \Rightarrow \begin{cases} x-2y = -9 \\ x+z = 10 \end{cases}$

Formamos el sistema con las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} x-2y = -9 \\ x+z = 10 \\ x-4y-z = -10 \\ 3x-4y+z = -2 \end{cases}$ y calculamos el

rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema. Como sale que el $\text{rango}(A) = 2$ y el $\text{rango}(M) = 3$, las dos rectas son paralelas.

b) Calculamos un plano perpendicular a r y que pasa por A

$$4x + 2y - 4z + D = 0 \Rightarrow 4 \cdot 3 + 2 \cdot 6 - 4 \cdot 7 + D = 0 \Rightarrow D = 4 \Rightarrow 4x + 2y - 4z + 4 = 0 \Rightarrow 2x + y - 2z + 2 = 0$$



Calculamos el punto M , punto de corte de la recta s con el plano.

$$\begin{cases} x - 4y - z = -10 \\ 3x - 4y + z = -2 \\ 2x + y - 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -10 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -10 \\ 0 & 8 & 4 & 28 \\ 0 & 9 & 0 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 1; y = 2; z = 3$$

La distancia viene dada por el módulo del vector $\overrightarrow{AM} = (-2, -4, -4)$

$$d(r, s) = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = 6 \text{ u}$$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $A(0,1,0)$ y es perpendicular a la recta

r dada por $x+1 = \frac{y+2}{2} = z-1$

b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano de ecuación $2x+3y+4z=12$ con los ejes coordenados.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El vector normal del plano es el vector director de la recta, luego todos los planos perpendiculares a la recta tendrán de ecuación: $x+2y+z+D=0$

De todos esos planos nos interesa el que pasa por el punto A , luego:

$$x+2y+z+D=0 \Rightarrow 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow x+2y+z-2=0$$

b) Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados: $A=(6,0,0)$; $B=(0,4,0)$;

$C=(0,0,3)$. Calculamos los vectores $\vec{AB}=(-6,4,0)$ y $\vec{AC}=(-6,0,3)$.

Hacemos el producto vectorial de los vectores:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 18\vec{j} + 24\vec{k}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \text{módulo} \left(\vec{AB} \wedge \vec{AC} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + 18^2 + 24^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1044} = \sqrt{261} = 16,15 u^2$$

Considera las rectas $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$

a) Estudia y determina la posición relativa de r y s .

b) Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos las ecuaciones implícitas de la recta r : $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x - 2z = -1 \end{cases}$

Formamos el sistema con las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x - 2z = -1 \\ 2x - 3y = -5 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$ y calculamos el rango de

la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 6F_3 \\ F_4 - F_3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 3$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 6F_3 \\ F_4 - F_3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 4$$

Como sale que el rango(A) = 3 y el rango (M) = 4, las dos rectas se cruzan.

b) Calculamos un punto y el vector director de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A = (-1, 0, -1) \\ \vec{u} = (2, 1, 3) \end{cases} ; \quad s \equiv \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (-4, -1, 0) \\ \vec{v} = (3, 2, 1) \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula: $d(r, s) = \frac{|\vec{AB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{9}{\sqrt{75}} = 1'039u$

Considera las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z$ y $s \equiv \begin{cases} x+nz = -2 \\ y-z = -3 \end{cases}$

a) Halla los valores de m y n para los que r y s se corten perpendicularmente.

b) Para $m = 3$ y $n = 1$, calcula la ecuación general del plano que contiene a r y a s .

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + mt \\ z = t \end{cases} \Rightarrow A = (1, -1, 0) ; \vec{u} = (2, m, 1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -2 - ns \\ y = -3 + s \\ z = s \end{cases} \Rightarrow B = (-2, -3, 0) ; \vec{v} = (-n, 1, 1)$$

Los vectores \vec{u} y \vec{v} son perpendiculares, luego: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow -2n + m + 1 = 0$

Las dos rectas se tienen que cortar en un punto, luego: $Rango(\vec{u}, \vec{v}) = Rango(\vec{u}, \vec{v}, \overline{AB}) = 2$, por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ -n & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3m + 2n + 3 + 4 = 0 \Rightarrow -3m + 2n + 7 = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que:

$$\begin{cases} -2n + m + 1 = 0 \\ -3m + 2n + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 4 ; n = \frac{5}{2}$$

b) Estudiamos la posición de las rectas cuando $m = 3$ y $n = 1$.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow A = (1, -1, 0) ; \vec{u} = (2, 3, 1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -2 - s \\ y = -3 + s \\ z = s \end{cases} \Rightarrow B = (-2, -3, 0) ; \vec{v} = (-1, 1, 1)$$

Calculamos el $Rango(\vec{u}, \vec{v}, \overline{AB})$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -9 + 2 + 3 + 4 = 0 \Rightarrow Rango = 2 \Rightarrow \text{Se cortan en un punto}$$

Luego, el plano viene determinado por el punto A y los vectores \vec{u} y \vec{v}

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -1 \\ y+1 & 3 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 3y + 5z - 5 = 0$$