

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x=0$ y $\pi_2 \equiv y=0$

a) Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2 .

b) Determina la posición relativa de la recta r y la recta de intersección de los planos π_1 y π_2 .

MATEMÁTICAS II. 2019. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas y calculamos un punto genérico.

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 2-t \\ y = 2+3t \\ z = 1+t \end{cases} \Rightarrow P = (2-t, 2+3t, 1+t)$$

Calculamos la distancia de ese punto a los planos, aplicando la fórmula de la distancia de un punto a un

plano: $d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$\frac{1(2-t)}{\sqrt{1}} = + \frac{1(2+3t)}{\sqrt{1}} \Rightarrow 2-t = 2+3t \Rightarrow t=0 \Rightarrow P = (2, 2, 1)$$

$$\frac{1(2-t)}{\sqrt{1}} = - \frac{1(3+2t)}{\sqrt{1}} \Rightarrow 2-t = -2-3t \Rightarrow t = -2 \Rightarrow P = (4, -4, -1)$$

b) Calculamos un punto y vector director de cada recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2-t \\ y = 2+3t \\ z = 1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = (2, 2, 1) \\ \vec{u} = (-1, 3, 1) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (0, 0, 0) \\ \vec{v} = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Calculamos el rango de la matriz formada por los vectores:

$$\vec{u} = (-1, 3, 1) ; \vec{v} = (0, 0, 1) \text{ y } \vec{AB} = (-2, -2, -1)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -6 - 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango} = 3 \Rightarrow \text{las rectas se cruzan}$$

Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1,0)$; $B(1,0,2)$; $C(0,2,1)$.

a) Halla el área de dicho triángulo.

b) Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

MATEMÁTICAS II. 2019. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores: $\vec{AB} = (0, -1, 2)$; $\vec{AC} = (-1, 1, 1)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| =$$
$$= \frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} (-3, -2, -1) = \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2} u^2$$

$$\text{b) } \cos A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-1+2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = 0'2581$$

Considera el punto $A(2,1,0)$ y los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x - y + z = 0$.

a) Calcula la recta que pasa por A y es paralela a π_1 y a π_2 .

b) Calcula los puntos de la recta $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{2}$ que equidistan de π_1 y π_2 .

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Los vectores normales de los planos son: $n_1 = (1,1,1)$ y $n_2 = (1,-1,1)$. El vector director de la recta es un vector normal a los vectores normales de los planos, luego:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} - \vec{k} - \vec{j} + \vec{i} = (2, 0, -2)$$

Luego, la recta pedida es: $r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-2}$

b) Pasamos la recta s a paramétricas $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$ y, por tanto, podemos tomar

como punto genérico de la recta $P = (1 + 2t, 2 + 3t, 2t)$.

Como piden los puntos que equidistan de los planos π_1 y π_2 , tenemos que $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$, luego:

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \Rightarrow \frac{|1 + 2t + 2 + 3t + 2t|}{\sqrt{3}} = \frac{|1 + 2t - 2 - 3t + 2t|}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{|3 + 7t|}{\sqrt{3}} = \frac{|-1 + t|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |3 + 7t| = |-1 + t|$$

de donde salen las ecuaciones:

$$3 + 7t = -1 + t \Rightarrow 6t = -4 \Rightarrow t = -\frac{2}{3} \Rightarrow P = \left(1 - \frac{4}{3}, 2 - 3 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, 0, -\frac{4}{3}\right)$$

$$3 + 7t = -(-1 + t) \Rightarrow 8t = -2 \Rightarrow t = -\frac{1}{4} \Rightarrow P = \left(1 - \frac{2}{4}, 2 - 3 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\right)$$

Considera los puntos $A = (0, 3, -1)$ y $B = (0, 1, a)$ y el plano π de ecuación $x - y + z = 0$.

a) Determina a sabiendo que la recta que pasa por A y por B es paralela al plano π .

b) Halla el punto de corte del plano π con la recta que pasa por A y es perpendicular a dicho plano.

c) Para $a = 2$, halla el plano que contiene a los puntos A y B y es perpendicular al plano π .

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector director de la recta que pasa por A y B :

$$\vec{u} = (0, 1, a) - (0, 3, -1) = (0, 2, -1 - a)$$

Este vector tiene que ser perpendicular al vector normal del plano: $\vec{n} = (1, -1, 1)$. Luego, su producto escalar debe valer cero.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (0, 2, -1 - a) \cdot (1, -1, 1) = 0 \Rightarrow -2 - 1 - a = 0 \Rightarrow a = -3$$

b) La recta que pasa por A y es perpendicular al plano, tiene de ecuación:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Calculamos el punto de corte con el plano, sustituyendo en la ecuación del plano.

$$t - 3 + t - 1 + t = 0 \Rightarrow 3t = 4 \Rightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow P = \left(\frac{4}{3}, 3 - \frac{4}{3}, -1 + \frac{4}{3} \right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

c) Para $a = 2$, el vector $\vec{u} = (0, 1, 2) - (0, 3, -1) = (0, 2, -3)$. El plano que nos piden viene definido por el punto A y los vectores $\vec{u} = (0, 2, -3)$ y $\vec{n} = (1, -1, 1)$ y su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ y-3 & 2 & -1 \\ z+1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - 3y - 2z + 7 = 0 \Rightarrow x + 3y + 2z - 7 = 0$$

Sea r la recta que pasa por el punto $P(2, -2, -1)$ con vector director $\vec{v} = (k, 3+k, -2k)$ y sea π el plano de ecuación $-x + 2y + 2z - 1 = 0$.

- a) Calcula el valor de k para que r sea paralela a π .
 b) Calcula el valor de k para que r sea perpendicular a π .
 c) Para $k = -1$, calcula los puntos de r que distan 3 unidades de π .

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Si r es paralela a π , el vector $\vec{v} = (k, 3+k, -2k)$ de la recta y el vector normal del plano $\vec{n} = (-1, 2, 2)$ son perpendiculares, luego su producto escalar vale 0.

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (k, 3+k, -2k) \cdot (-1, 2, 2) = 0 \Rightarrow -k + 6 + 2k - 4k = 0 \Rightarrow k = 2$$

b) Si r es perpendicular a π , el vector $\vec{v} = (k, 3+k, -2k)$ de la recta y el vector normal del plano $\vec{n} = (-1, 2, 2)$ son paralelos, luego sus componentes son proporcionales.

$$\frac{k}{-1} = \frac{3+k}{2} = \frac{-2k}{2} \Rightarrow k = -1$$

c) Para $k = -1$, la recta tiene de ecuación $r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$. Un punto genérico de la recta tiene de

componentes $A(2-t, -2+2t, -1+2t)$. Calculamos el punto que dista 3 unidades de π .

$$d(A, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-1 \cdot (2-t) + 2 \cdot (-2+2t) + 2 \cdot (-1+2t) - 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |9t - 9| = 9 \Rightarrow \begin{cases} 9t - 9 = 9 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow A = (0, 2, 3) \\ -9t + 9 = 9 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow A = (2, -2, -1) \end{cases}$$

Considera el punto $P(-5,3,1)$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

a) Calcula la ecuación general del plano que pasa por P y contiene a r .

b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a r .

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y el vector director de la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} A = (0, 3, 2) \\ \vec{u} = (2, 2, -1) \end{cases}$

El plano que nos piden viene definido por $P = (-5, 3, 1)$ y los vectores $\vec{u} = (2, 2, -1)$ y $\vec{AP} = (5, 0, 1)$.
Luego, la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x+5 & 2 & 5 \\ y-3 & 2 & 0 \\ z-1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x+10-5y+15-10z+10-2y+6=0 \Rightarrow 2x-7y-10z+41=0$$

b) Un punto genérico de r es: $A = (2t, 3+2t, 2-t)$. El vector $\vec{AP} = (-5-2t, -2t, -1+t)$ tiene que ser perpendicular al vector director de la recta $\vec{u} = (2, 2, -1)$, luego su producto escalar debe valer 0.

$$\vec{AP} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (-5-2t, -2t, -1+t) \cdot (2, 2, -1) = 0 \Rightarrow -10-4t-4t+1-t=0 \Rightarrow t = -1$$

La ecuación de la recta que nos piden viene determinada por el punto $P = (-5, 3, 1)$ y el vector

$$\vec{AP} = (-3, 2, -2), \text{ luego: } \frac{x+5}{-3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-2}$$

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ -y + z + 5 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - mz = 1$.

a) Calcula m sabiendo que r y π son paralelos.

b) Para $m = -1$, calcula la distancia entre r y π .

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta r a paramétricas $r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ -y + z + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -2 - y \\ y = y \\ z = -5 + y \end{cases}$

Si la recta r y el plano π son paralelos, el vector director de la recta $\vec{u} = (-1, 1, 1)$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (2, 1, -m)$ son perpendiculares, luego su producto escalar vale 0.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (-1, 1, 1) \cdot (2, 1, -m) = 0 \Rightarrow -2 + 1 - m = 0 \Rightarrow m = -1$$

b) Como la recta y el plano son paralelos, basta con calcular la distancia del punto de la recta $A = (-2, 0, -5)$ al plano

$$d(A, \pi) = \frac{|2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-5) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{6}} = 4,08u$$

Halla cada uno de los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ de manera que junto con los puntos

$A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$ y $C(0,1,1)$ formen un tetraedro de volumen $\frac{5}{6}$

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Luego, cualquier punto D de la recta tiene de coordenadas $D(t, t, t)$.

Calculamos los vectores $\vec{AB} = (0, -1, 1)$; $\vec{AC} = (-1, 0, 1)$ y $\vec{AD} = (t-1, t-1, t)$. El volumen del tetraedro será:

$$V = \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ t-1 & t-1 & t \end{vmatrix} \Rightarrow 5 = |-3t+2| \Rightarrow \begin{cases} -3t+2=5 \Rightarrow t=-1 \\ 3t-2=5 \Rightarrow t=\frac{7}{3} \end{cases}$$

Luego, los puntos son: $D_1 = (-1, -1, -1)$ y $D_2 = \left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$

Considera la recta $r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$.

- a) Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r .
b) Calcula la distancia entre r y π .

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

- a) El plano que nos piden viene definido por el punto $A=(4,0,1)$ y los vectores $\vec{u}=(2,1,5)$ y $\vec{n}=(2,1,-1)$, luego su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-4 & 2 & 2 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = x-2y-4=0$$

- b) Como la recta y el plano son paralelos, basta con calcular la distancia del punto A al plano

$$d(A, \pi) = \frac{|2 \cdot 4 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{6}} = 4'08u$$

Se consideran los puntos $A(0, -1, 3)$, $B(2, 3, -1)$ y la recta $r \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$.

a) Halla un punto C de r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en A .

b) Calcula los puntos de r que equidistan de los puntos A y B .

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -2+t \\ y = 2+2t \\ z = 3+3t \end{cases}$

Un punto genérico de la recta tiene de componentes $C = (-2+t, 2+2t, 3+3t)$. Si el triángulo es rectángulo en A , los vectores $\vec{AB} = (2, 4, -4)$; $\vec{AC} = (-2+t, 3+2t, 3t)$ tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar es 0.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow (2, 4, -4) \cdot (-2+t, 3+2t, 3t) = 0 \Rightarrow -4 + 2t + 12 + 8t - 12t = 0 \Rightarrow t = 4$$

Por lo tanto, el punto que nos piden es: $C = (-2+4, 2+8, 3+12) = (2, 10, 15)$

b) Calculamos los vectores: $\vec{AC} = (-2+t, 3+2t, 3t)$ y $\vec{BC} = (-4+t, -1+2t, 4+3t)$

Como el punto C equidista de A y de B , se cumple que: $|\vec{AC}| = |\vec{BC}|$.

$$\sqrt{(-2+t)^2 + (3+2t)^2 + (3t)^2} = \sqrt{(-4+t)^2 + (-1+2t)^2 + (4+3t)^2}$$

$$\sqrt{14t^2 + 8t + 13} = \sqrt{14t^2 + 12t + 33} \Rightarrow -4t = 20 \Rightarrow t = -5$$

Luego, el punto que nos piden es: $C = (-7, -8, -12)$.

Se consideran los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (1, -2, -1)$ y $\vec{w} = (2, \alpha, \beta)$, donde α y β son números reales.

- a) Determina los valores de α y β para los que \vec{w} es ortogonal a los vectores \vec{u} y \vec{v} .
- b) Determina los valores de α y β para los que \vec{w} y \vec{v} tienen la misma dirección.
- c) Para $\alpha = 8$, determina el valor de β para el que \vec{w} es combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} .
- MATEMÁTICAS II. 2019. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

R E S O L U C I Ó N

a) Como son ortogonales, su producto escalar vale cero, luego:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 2 + 2\alpha + 3\beta = 0 \\ \vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 2 - 2\alpha - \beta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = 2 ; \beta = -2$$

b) Si los dos vectores tienen la misma dirección, sus componentes son proporcionales, luego:

$$\frac{2}{1} = \frac{\alpha}{-2} = \frac{\beta}{-1} \Rightarrow \alpha = -4 ; \beta = -2$$

c) Si el vector \vec{w} es combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} , esto quiere decir que los tres vectores son linealmente dependientes, es decir, su determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 8 & \beta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2\beta - 4 + 24 + 12 - 2\beta + 8 = 0 \Rightarrow \beta = 10$$

Considera las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$

a) Halla k sabiendo que ambas se cortan en un punto.

b) Para $k=1$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s .

MATEMÁTICAS II. 2019. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y vector director de cada recta.

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{2} \Rightarrow A = (2, k, 0) ; \vec{u} = (1, 2, 2)$$

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1} \Rightarrow B = (-1, 1, 3) ; \vec{v} = (-1, 1, 1)$$

Las rectas se cortan si el determinante de los vectores $\vec{AB} = (-3, 1-k, 3) ; \vec{u}$ y \vec{v} vale cero, luego:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1-k & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6 + 3 - 2 + 2k + 6 - 1 + k + 6 = 0 \Rightarrow k = -2$$

b) El plano viene definido por el punto A y los vectores \vec{u} y \vec{v} , luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ y-1 & 2 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3y + 3z + 3 = 0 \Rightarrow -y + z + 1 = 0$$