EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2000

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde un determinado punto. La altura en metros alcanzada al cabo de t segundos, viene dada por $h(t)=5-5t-5e^{-2t}$.
a) Calcula el tiempo transcurrido hasta alcanzar la altura máxima y el valor de ésta.
b) Teniendo en cuenta que la velocidad es $v(t)=h'(t)$, halla la velocidad al cabo de 2 segundos.
MATEMÁTICAS II. 2000. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada.

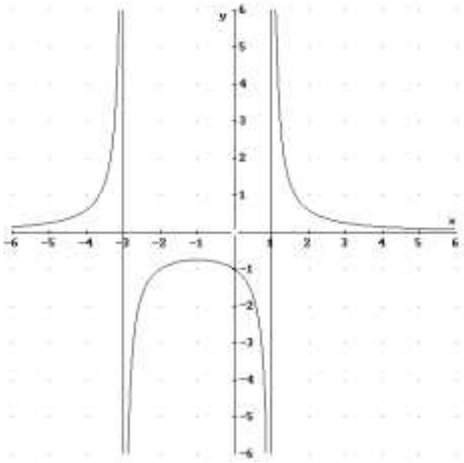
$$h'=-5+10e^{-2t}=0 \Rightarrow e^{-2t}=\frac{1}{2} \Rightarrow -2t\ln e=\ln\frac{1}{2} \Rightarrow t=-0'34\ seg$$

$$h=5-5\cdot 0'34-5e^{-0'68}=0'76\ m$$

b)

$$v=-5+10e^{-2t} \Rightarrow v(2)=-5+10e^{-4}=-4'81\ m/s$$

Determina a, b, c, para que la curva $f(x)=\dfrac{a}{x^2+bx+c}$ sea la siguiente:



MATEMÁTICAS II. 2000. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vemos que $x=1$ y $x=-3$ son asíntotas verticales, luego:

$$(x-1)\cdot(x+3)=x^2+2x-3=x^2+bx+c \Rightarrow b=2\ ;\ c=-3$$

En la figura se observa que $f(0)=-1 \Rightarrow -1=\dfrac{a}{-3} \Rightarrow a=3$

Luego, la función es: $f(x)=\dfrac{3}{x^2+2x-3}$

De entre todos los rectángulos de 40 kilómetros de perímetro, calcula las dimensiones del que tiene área máxima.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea máximo: $S_{\max} = x \cdot y$

b) Relación entre las variables: $40 = 2x + 2y \Rightarrow y = \dfrac{40 - 2x}{2} = 20 - x$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max} = x \cdot y = x \cdot (20 - x) = 20x - x^2$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\max} = 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10\ Km\ ;\ y = 10\ Km$$

Calcula a y b sabiendo que la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\begin{cases} ax+5x^2 & si\ \ x\le 2 \\ \dfrac{a}{x}+bx & si\ \ x>2 \end{cases}$ es derivable.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Si la función es derivable en $x=2$, primero tiene que ser continua en dicho punto, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} ax+5x^2=2a+20 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{a}{x}+bx=\dfrac{a}{2}+2b \end{array}\right\} \Rightarrow 2a+20=\frac{a}{2}+2b \Rightarrow 3a-4b=-40$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} a+10x & si\ \ x\le 2 \\ -\dfrac{a}{x^2}+b & si\ \ x>2 \end{cases}$

Como es derivable en $x=2$, se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=a+20 \\ f'(2^+)=-\dfrac{a}{4}+b \end{array}\right\} \Rightarrow a+20=-\frac{a}{4}+b \Rightarrow 5a-4b=-80$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 3a-4b=-40 \\ 5a-4b=-80 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-20\ ;\ b=-5$$

Determina el valor de las constantes *a, b* y *c* sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x\cdot(ax^2+bx+c)$ tiene un punto de inflexión en $(-2,12)$ y que en dicho punto la recta tangente tiene por ecuación $10x+y+8=0$.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c\ ;\ f''(x)=6ax+2b$$

Pasa por $(-2,12)\Rightarrow f(-2)=12\Rightarrow -8a+4b-2c=12$

Punto de inflexión en $x=-2\Rightarrow f''(-2)=0\Rightarrow -12a+2b=0$

La tangente en $x=-2$ tiene de pendiente $-10\ \Rightarrow f'(-2)=-10\Rightarrow 12a-4b+c=-10$

Resolviendo el sistema formado por las 3 ecuaciones que hemos obtenido: $\left.\begin{array}{l}-8a+4b-2c=12\\-12a+2b=0\\12a-4b+c=-10\end{array}\right\}$

Resulta: $a=1$; $b=6$; $c=2$

Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\, sen\, x}{tg\, x^2}$

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\, sen\, x}{tg\, x^2}$, le aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\, sen\, x}{tg\, x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x + x \cos x}{2x(1 + tg\, x^2)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x + \cos x - x sen x}{2(1 + tg\, x^2) + 2x \cdot 2x(1 + tg\, x^2)} = \frac{2}{2} = 1$$

Se ha observado que en una carretera de salida de una gran ciudad la velocidad de los coches entre las 2 h. y las 6 h. de la tarde viene dada por:

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8 \quad \text{para } t \in [2,6]$$

a) ¿A qué hora circulan los coches con mayor velocidad?. Justifica la respuesta.
b) ¿A qué hora circulan los coches con menor velocidad?. Justifica la respuesta.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada.

$$v' = 3t^2 - 30t + 72 = 0 \Rightarrow t = 4 \; ; \; t = 6$$

$$v(2) = 100 \; ; \; v(4) = 120 \; ; \; v(6) = 116$$

El máximo de velocidad se alcanza para $t = 4$.

b) Los coches circulan a menor velocidad para $t = 2$.

Sea f la función definida $x \neq -2$ por $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$
a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos locales de f.
c) Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica de f.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función *f(x)* es $\mathbb{R}-\{-2\}$.

Asíntotas Verticales: La recta $x=-2$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x \to -2} f(x) = \pm\infty$

Asíntotas Horizontales: No tiene ya que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$

Asíntota Oblicua: La ecuación es $y = x-2$:

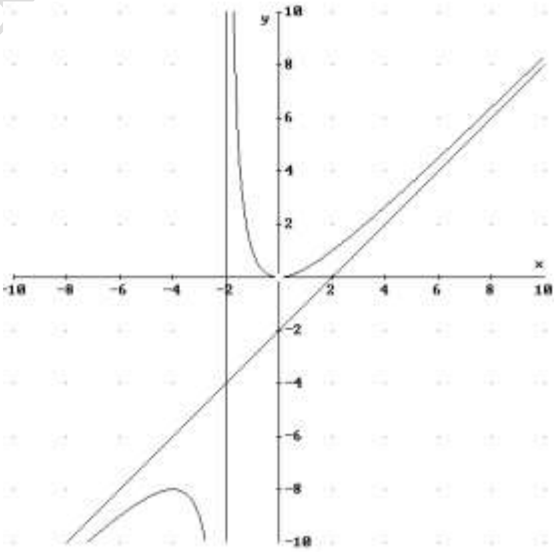
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+2x} = 1 \; ; \; n = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x+2} - 1x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2-2x}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{x+2} = -2$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y' = \dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \; ; \; x = -4$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,0)$	$(0,\infty)$
Signo y'	+	–	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ Máximo$(-4,-8)$ $\downarrow$ mínimo$(0,0)$

c)



Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida de la forma: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3} & si\ \ x\le -2\\ 0 & si\ \ -2<x\le 1\\ \frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3} & si\ \ 1<x\end{cases}$

Estudia la derivabilidad de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a estudiar primero la continuidad en $x=-2$ y en $x=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -2^-}\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}=0\\ \lim_{x\to -2^+}0=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Continua en } x=-2$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-}0=0\\ \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Continua en } x=1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases}x^2-1 & si\ \ x\le -2\\ 0 & si\ \ -2<x\le 1\\ x^2-1 & si\ \ 1<x\end{cases}$

Vamos a estudiar la derivabilidad en $x=-2$ y en $x=1$

$$\left.\begin{array}{l}f'(-2^-)=3\\ f'(-2^+)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{No es derivable en } x=-2$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(1^-)=0\\ f'(1^+)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Si es derivable en } x=1$$

Luego, la función es derivable $\mathbb{R}-\{-2\}$.

Una empresa quiere fabricar vasos de cristal de forma cilíndrica con una capacidad de 250 centímetros cúbicos. Para utilizar la mínima cantidad posible de cristal, se estudian las medidas apropiadas para que la superficie total del vaso sea mínima. ¿Cuáles deben ser dichas dimensiones?. Justifica la respuesta.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea mínimo: $S_{\min} = 2\pi r h + \pi r^2$

b) Relación entre las variables: $250 = \pi r^2 h \Rightarrow h = \dfrac{250}{\pi r^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\min} = 2\pi r h + \pi r^2 = 2\pi r \frac{250}{\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{500}{r} + \pi r^2$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\min} = -\frac{500}{r^2} + 2\pi r = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{2\pi}} = 4'3\ cm\ ;\ h = 4'3\ cm$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & si\ \ x\neq 0\\ 0 & si\ \ x=0\end{cases}$

a) Calcula los límites laterales de *f* en $x=0$. ¿Es *f* continua en $x=0$?.
b) Calcula el valor de la derivada de *f* en $x=1$.
MATEMÁTICAS II. 2000. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{No es continua en } x=0$$

b) Calculamos la función derivada: $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}\Rightarrow f'(1)=\dfrac{e}{(1+e)^2}$

Determina una función polinómica de grado 3 sabiendo que verifica que alcanza un máximo en $x=1$, que su gráfica pasa por el punto $(1,1)$ y que la recta de ecuación $y=x$ es tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x=0$.
MATEMÁTICAS II. 2000. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

La función será: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \ ; \ f''(x)=6ax+2b$$

Pasa por $(1,1) \Rightarrow f(1)=1 \Rightarrow a+b+c+d=1$

Máximo en $x=1 \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 3a+2b+c=0$

Pasa por $(0,0) \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow d=0$

La tangente en $x=0$ tiene de pendiente 1 $\Rightarrow f'(0)=1 \Rightarrow c=1$

Resolviendo el sistema resulta: $a=-1$; $b=1$; $c=1$; $d=0 \Rightarrow f(x)=-x^3+x^2+x$