

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Considera la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$

a) Calcula las asíntotas de la gráfica de  $f$ .

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos de  $f$  (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

**MATEMÁTICAS II. 2002. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical: No tiene.

Asíntota horizontal:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2x} = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1$ .

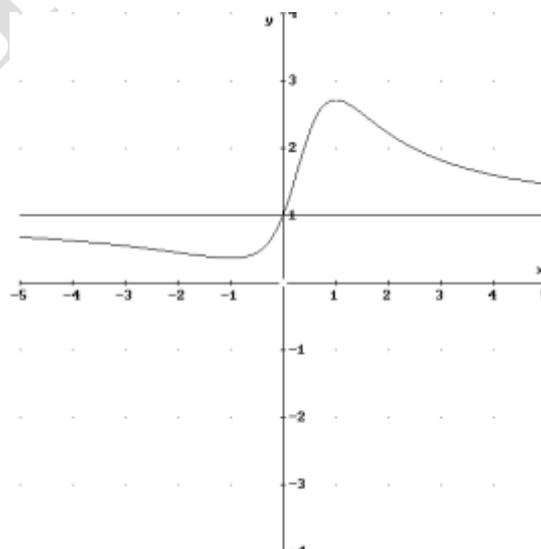
Asíntota oblicua: No tiene

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y' = \frac{2 \cdot (x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \cdot e^{\frac{2x}{x^2+1}} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} \cdot e^{\frac{2x}{x^2+1}} = 0 \Rightarrow x=1 ; x=-1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Signo $y'$	-	+	-
Función	D	C	D

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 mínimo  $(-1, e^{-1})$     Máximo  $(1, e)$



Sea  $f$  la función definida por  $f(x) = \frac{9x-3}{x^2-2x}$  para  $x \neq 0$  y  $x \neq 2$ .

- a) Calcula las asíntotas de la gráfica de  $f$ .  
 b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$ .  
 c) Con los datos obtenidos, esboza la gráfica de  $f$ .

**MATEMÁTICAS II. 2002. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical:  $x=0$  y  $x=2$ .

Asíntota horizontal:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{2x-2} = 0 \Rightarrow y=0$ .

Asíntota oblicua: No tiene

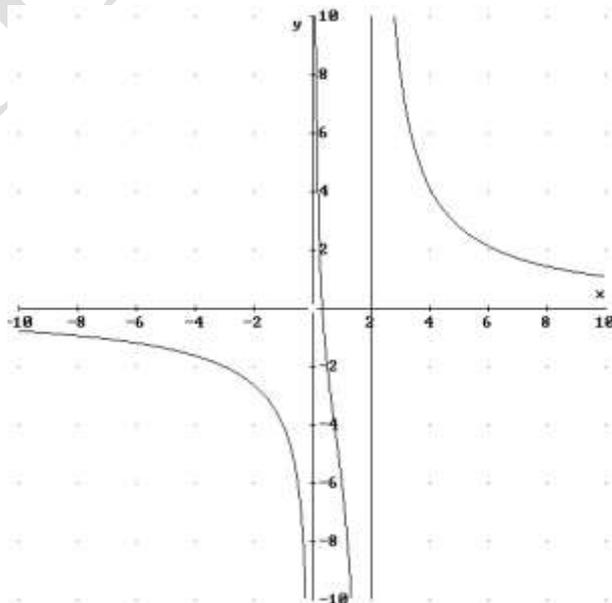
b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y' = \frac{9 \cdot (x^2 - 2x) - (2x - 2) \cdot (9x - 3)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-9x^2 + 6x - 6}{(x^2 - 2x)^2} = 0 \Rightarrow \text{No}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Signo $y'$	-	-	-
Función	D	D	D

La función es decreciente en su dominio.

c)



Determina el valor de las constantes  $c$  y  $d$  sabiendo que la gráfica de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^3 + 3x^2 + cx + d$  tiene como recta tangente en su punto de inflexión a la recta  $y = 3x + 4$ .

**MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos el punto de inflexión de la función.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + c ; f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

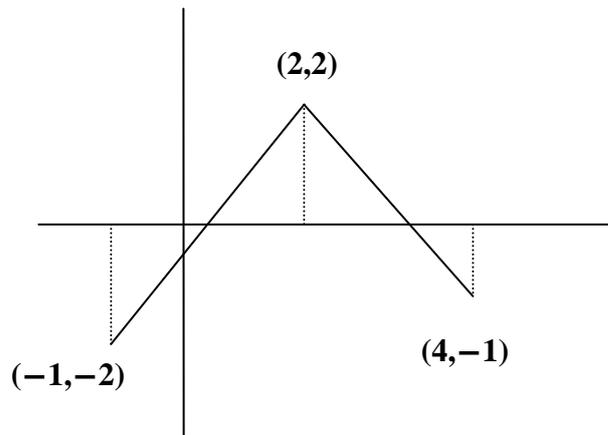
A continuación, aplicamos las condiciones del problema.

$$f'(-1) = 3 \Rightarrow 3(-1)^2 + 6 \cdot (-1) + c = 3 \Rightarrow c = 6$$

$$\text{Pasa por } P(-1,1) \Rightarrow f(-1) = 1 \Rightarrow 1 = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + d \Rightarrow d = 5$$

Luego, la función será:  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 5$ .

Sea  $f : [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  una función cuya derivada tiene por gráfica la de la figura.



a) Estudia el crecimiento y el decrecimiento de  $f$  y determina los valores donde alcanza sus extremos relativos.

b) Estudia la concavidad y convexidad de  $f$ . ¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de  $f$ ?

**MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.**

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la ecuación de la recta que pasa por  $(2, 2)$  y  $(-1, -2)$ .

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-2}{-2-2} \Rightarrow y = \frac{4x-2}{3}, \text{ el punto de corte con el eje X es: } \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por  $(2, 2)$  y  $(4, -1)$ .

$$\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-2}{-1-2} \Rightarrow y = \frac{-3x+10}{2}, \text{ el punto de corte con el eje X es: } \left(\frac{10}{3}, 0\right)$$

	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right)$	$\left(\frac{10}{3}, 4\right)$
Signo $y'$	-	+	-
Función	D	C	D

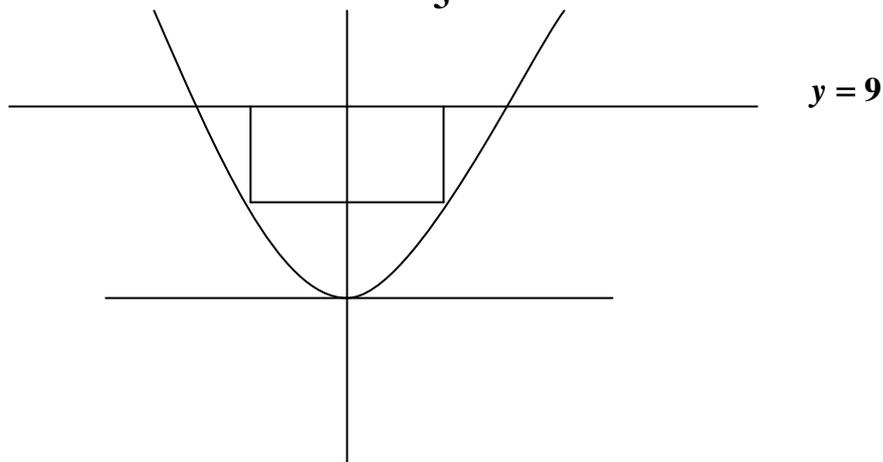
Máximo en  $x = \frac{10}{3}$ ; mínimo en  $x = \frac{1}{2}$

$$b) f'(x) = \begin{cases} \frac{4x-2}{3} & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{-3x+10}{2} & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{2} & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

	$(-1, 2)$	$(2, 4)$
Signo $y''$	+	-
Función	Cx	Cn

Luego, tiene un punto de inflexión en  $x = 2$

Considera el recinto limitado por la curva  $y = \frac{1}{3}x^2$  y la recta  $y = 9$



De entre los rectángulos situados como el de la figura, determina el que tiene área máxima.  
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

### R E S O L U C I Ó N

a) La función que queremos que sea máxima es:  $S_{\max} = 2x \cdot (9 - y)$

b) Relación entre las variables:  $y = \frac{x^2}{3}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max} = 2x \cdot \left(9 - \frac{x^2}{3}\right) = \frac{54x - 2x^3}{3}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = \frac{54 - 6x^2}{3} = 0 \Rightarrow x = 3$$

Luego, las dimensiones son:  $x = 3$  ;  $y = 3$ .  $S_{\max} = 2x \cdot (9 - y) = 36u^2$

De entre todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas, determina las que son tangentes a la curva de ecuación  $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 4$ . Calcula los puntos de tangencia correspondientes.

**MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

La ecuación de todas las rectas tangentes será:  $y - \frac{1}{4}a^2 - 4a - 4 = \left(\frac{a}{2} + 4\right) \cdot (x - a)$ ; y como queremos que pasen por el punto  $(0,0)$ , tenemos:

$$0 - \frac{1}{4}a^2 - 4a - 4 = \left(\frac{a}{2} + 4\right) \cdot (0 - a) \Rightarrow -a^2 - 16a - 16 = -2a^2 - 16a \Rightarrow a^2 - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -4 \end{cases}$$

$$a = 4 \Rightarrow y - \frac{1}{4}4^2 - 4 \cdot 4 - 4 = \left(\frac{4}{2} + 4\right) \cdot (x - 4) \Rightarrow y = 6x ; \text{ Punto } (4, 24)$$

$$a = -4 \Rightarrow y - \frac{1}{4}(-4)^2 - 4 \cdot (-4) - 4 = \left(\frac{-4}{2} + 4\right) \cdot (x + 4) \Rightarrow y = 2x ; \text{ Punto } (-4, -8)$$

Estudia la derivabilidad de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:  $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ .

**MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

Si la función es derivable en  $x=0$ , primero tiene que ser continua en dicho punto, luego:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } x}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} = \lim_{x \rightarrow 0^+} = 1 \Rightarrow \text{Continua}$$

Calculamos la función derivada:  $f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \text{sen } x}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = \frac{0}{0} = \frac{\cos x - x \text{sen } x - \cos x}{2x} = \frac{-x \text{sen } x}{2x} = \frac{0}{0} = \frac{-\text{sen } x - x \cos x}{2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) = 0$$

Luego, la función es derivable.



Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por:  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$  y sea  $r$  la recta de ecuación  $2x + y = 6$ .

a) Determina, si es posible, un punto de la gráfica de  $f$  en el que la recta tangente sea  $r$ .

b) ¿Hay algún punto de la gráfica de  $f$  en el que la recta normal a la gráfica sea  $r$ ? Justifica la respuesta.

**MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Si  $r$  es tangente se tiene que cumplir que:

$$f'(x) = -2 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 5 = -2 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 7 = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = \frac{7}{3}$$

Sólo el punto  $(1, 4)$ , pertenece a la recta y a la curva.

b) La recta  $2x + y = 6$  corta a la función en el punto  $(3, 0)$ , pero en ese punto la recta tangente tiene de pendiente 2 y no  $\frac{1}{2}$ , luego, no existe ese punto.

Considera la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:  $f(x) = \begin{cases} 3ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ e^{x(ax+b)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ . Determina  $a$  y  $b$  sabiendo que  $f$  es derivable.  
**MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

Si la función es derivable en  $x=0$ , primero tiene que ser continua en dicho punto, luego:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} 3ax + b = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x(ax+b)} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow b = 1$$

Calculamos la función derivada:  $f'(x) = \begin{cases} 3a & \text{si } x \leq 0 \\ (2ax+b) \cdot e^{x(ax+b)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Como es derivable en  $x=0$ , se cumple que:

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 3a \\ f'(0^+) = b \end{array} \right\} \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

Considera la curva de ecuación  $y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2x - 3}$ .

a) Determina sus asíntotas.

b) ¿Corta la curva a alguna de sus asíntotas en algún punto?. Justifica la respuesta.

**MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos el dominio de la función:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 ; x = 3 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$$

a) Asíntota vertical:  $x = -1 ; x = 3$ .

Asíntota horizontal:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2x - 3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{2x - 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{2} = \infty \Rightarrow$  No tiene.

Asíntota oblicua:  $y = x + 2$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2x - 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x}{x^3 - 2x^2 - 3x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2x - 3} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^3 + 2x - x^3 + 2x^2 + 3x}{x^2 - 2x - 3} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x^2 + 5x}{x^2 - 2x - 3} \right] = 2$$

b) Calculamos el punto de corte de la asíntota oblicua con la función.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2x - 3} \\ y = x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2x - 3} = x + 2 \Rightarrow 9x + 6 = 0 \Rightarrow \left( -\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

Estudia la derivabilidad de la función  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3+x^2} - x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{x^2}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcula la función derivada.

**MATEMÁTICAS II. 2002. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a estudiar primero la continuidad en  $x=1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{3+x^2} - x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} + \frac{x^2}{4} = \frac{5}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{No es continua en } x=1, \text{ por lo tanto, no es derivable en } x=1$$

b) Calculamos la función derivada:  $f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{3+x^2}} - 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} + \frac{x}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Considera la función  $f$  definida por  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$  para  $x \neq 1$ .

a) Calcula las asíntotas de la gráfica de  $f$ .

b) Estudia la posición de la gráfica de  $f$  respecto de sus asíntotas.

**MATEMÁTICAS II. 2002. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical es  $x = 1$ .

Asíntota horizontal:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{1} = \infty \Rightarrow$  No tiene.

Asíntota oblicua:  $y = x - 1$

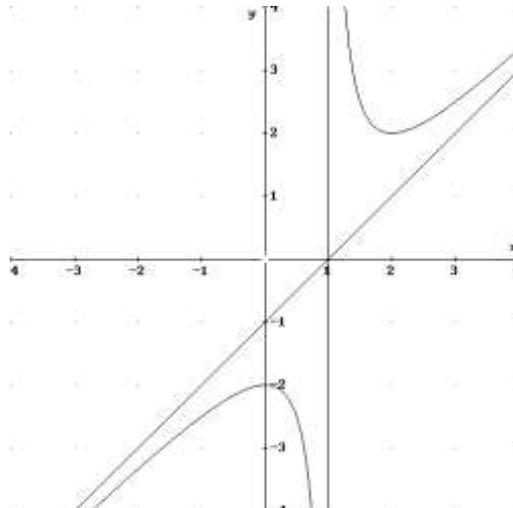
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = 1 ;$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + x}{x - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{-x + 2}{x - 1} \right] = -1$$

b) Calculamos la posición de la gráfica respecto de las asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - (x - 1) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + 2x - 1}{x - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{x - 1} \right] = 0^+ \text{ luego, } f(x) \text{ está por encima de la asíntota oblicua.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - (x - 1) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + 2x - 1}{x - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{x - 1} \right] = 0^- \text{ luego, } f(x) \text{ está por debajo de la asíntota oblicua.}$$



Considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Calcula los valores de  $t$  para los que el determinante de  $A$

es positivo y halla el mayor valor que alcanza dicho determinante.

MATEMÁTICAS II. 2002. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -t^2 + 3t + 4$$

Vemos que es una función cuadrática. Calculamos los puntos de corte con el eje X.

$$|A| = -t^2 + 3t + 4 = 0 \Rightarrow t = -1 ; t = 4$$

Luego, para todos los valores de  $t \in (-1, 4) \Rightarrow |A|$  es positivo.

Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$-2t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

Luego, el máximo se alcanza para  $t = \frac{3}{2}$  y vale  $|A| = \frac{25}{4}$