

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

a) Halla a , b y c para que la gráfica de f tenga un punto de inflexión de abscisa $x = \frac{1}{2}$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ tenga por ecuación $y = 5 - 6x$.

b) Para $a = 3$, $b = -9$ y $c = 8$, calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada primera y segunda de la función:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b ; f''(x) = 6x + 2a$$

- Punto de inflexión en $x = \frac{1}{2} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 6 \cdot \frac{1}{2} + 2a = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

- La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ tiene de pendiente -6

$$\Rightarrow f'(0) = -6 \Rightarrow 3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = -6 \Rightarrow b = -6$$

- La función pasa por el punto $(0, 5) \Rightarrow f(0) = 5 \Rightarrow c = 5$

b) Calculamos los máximos y los mínimos de la función: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = -3$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo f'	+	-	+
Función	C	D	C

Creciente: $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

Decreciente: $(-3, 1)$

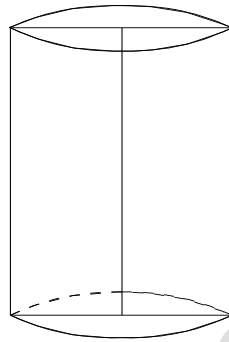
Máximo: $(-3, 35)$

Mínimo: $(1, 3)$

Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125 m^3 . Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínimo es: $S_{\min} = \pi r^2 + 2\pi r h$

b) Relación entre las variables: $V = \pi r^2 h = 125 \Rightarrow h = \frac{125}{\pi r^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\min} = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\pi r \frac{125}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{250}{r}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\min} = 2\pi r - \frac{250}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - 250}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{250}{2\pi}} = 3'41 \text{ m}$$

e) Comprobamos que corresponde a un mínimo:

$$S''_{\min} = \frac{6\pi r^2 \cdot r^2 - 2r(2\pi r^3 - 250)}{r^4} = \frac{2\pi r^3 + 500r}{r^3}$$

$$S''(r = 3'41) = \frac{2\pi(3'41)^3 + 500(3'41)}{(3'41)^3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}$$

Luego, las dimensiones del depósito son: $r = 3'41 \text{ m}$ y $h = \frac{125}{\pi(3'41)^2} = 3'41 \text{ m}$

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x} \right)$ es finito, calcula a y el valor del límite (ln denota el logaritmo neperiano).

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x} \right) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x \ln x - ax + a}{(x-1) \ln x} \right) = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} - a}{\ln x + (x-1) \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1 - a}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \frac{1-a}{0}$$

Como nos dicen que el límite existe y es finito, el numerador debe de ser igual a cero para poder seguir aplicando la regla de L'Hôpital, luego: $1-a=0 \Rightarrow a=1$.

Calculamos el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{x-1 \cdot (x-1)}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Considera la función derivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Calcula a y b .

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La función es derivable, luego, tiene que ser continua.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} ax + b = b \end{array} \right\} \Rightarrow b = 1$$

$$\text{Calculamos } f'(x) = \begin{cases} \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot 2x - 2(e^x - e^{-x})}{4x^2} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calculamos $f'(0^-)$ aplicando L'Hôpital:

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot 2x - 2(e^x - e^{-x})}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x(2x-2) + e^{-x}(2x+2)}{4x^2} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x(2x-2) + 2e^x - e^{-x}(2x+2) + 2e^{-x}}{8x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2xe^x - 2xe^{-x}}{8x} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2e^x + 2xe^x - 2e^{-x} + 2e^{-x}}{8} = \frac{0}{8} = 0 \end{aligned}$$

Calculamos $f'(0^+)$: $f'(0^+) = a$

Como es derivable se cumple que: $f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow a = 0$

b) La ecuación de la recta tangente en $x = -1$ es $y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1)$

$$f(-1) = \frac{e^{-1} - e}{-2} = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

$$f'(-1) = \frac{(e^{-1} + e) \cdot (-2) - (e^{-1} - e) \cdot 2}{4} = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

Luego la recta tangente en $x = -1$ es $y - \frac{e^2 - 1}{2e} = -\frac{1}{e} \cdot (x + 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{e} \cdot (x + 1) + \frac{e^2 - 1}{2e}$

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{1}{2x} + \ln x$ para $x > 0$

a) Determina el punto de la gráfica de f en el que la pendiente de la recta tangente es máxima

b) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La pendiente de la recta tangente es máxima en el punto de inflexión. Luego vamos a calcular los puntos de inflexión de esta función.

$$y' = \frac{-2}{4x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{x}$$

$$y'' = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 1$$

El valor $x = 0$ no está en el dominio, por lo tanto, sólo sirve el valor $x = 1$, es decir, el punto que nos piden es: $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

b) La ecuación de la recta normal en el punto $x = 1$, es: $y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1)$

Sustituyendo los valores de $f(1) = \frac{1}{2}$ y $f'(1) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$, tenemos:

$$y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\frac{1}{2}}(x - 1) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -2x + 2 \Rightarrow 4x + 2y - 5 = 0$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Halla b , c y d sabiendo que f tiene un máximo relativo en $x = -1$ y que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la derivada de la función: $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

- Máximo relativo en $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + 2b(-1) + c = 0 \Rightarrow -2b + c = -3$

$$- \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + bx^2 + cx + d}{x-1} = \frac{1+b+c+d}{0}$$

Como nos dicen que el límite existe y vale 4, el numerador debe de ser igual a cero para poder seguir aplicando la regla de L'Hôpital, luego: $1+b+c+d=0$.

Calculamos el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + bx^2 + cx + d}{x-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2bx + c}{1} = 3 + 2b + c = 4$$

Resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones que hemos obtenido:

$$\left. \begin{array}{l} -2b + c = -3 \\ b + c + d = -1 \\ 2b + c = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow b = 1; c = -1; d = -1$$

Luego, la función es: $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$, le aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x - \cos^3 x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x}{-2 \cos x \cdot \operatorname{sen} x + 3 \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x}{-2 \cos x + 3 \cos^2 x} = \frac{3}{-2 + 3} = 3 \end{aligned}$$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$

a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

c) Esboza la gráfica de f .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a) La función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$, no tiene asíntota vertical ya que su dominio es \mathbb{R} .

Vamos a ver si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x \cdot e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Por lo tanto, la asíntota horizontal es $y = 0$.

Como tiene asíntota horizontal, no puede tener asíntota oblicua.

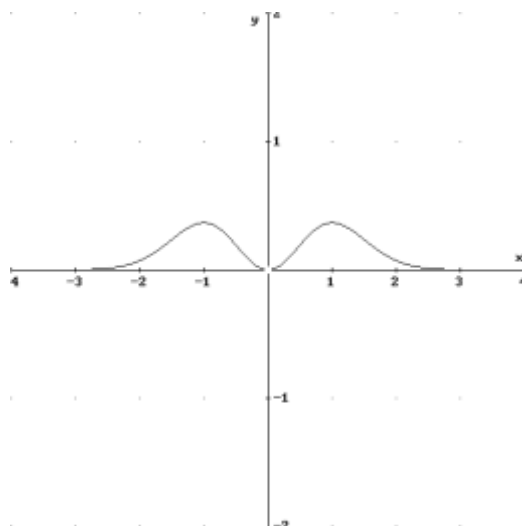
b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y' = \frac{2x \cdot e^{x^2} - 2x \cdot e^{x^2} \cdot x^2}{(e^{x^2})^2} = \frac{2x - 2x^3}{e^{x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 1 ; x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo y'	+	-	+	-
Función	C	D	C	D

\downarrow \downarrow \downarrow
 Máximo $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$ mínimo $(0, 0)$ Máximo $\left(1, \frac{1}{e}\right)$

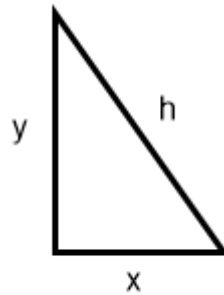
c)



De entre todos los triángulos rectángulos de área 8 cm^2 , determina las dimensiones del que tiene la hipotenusa de menor longitud.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínima: $h = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Relación entre las variables: $8 = \frac{x \cdot y}{2} \Rightarrow y = \frac{16}{x}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$h = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^4 + 256}{x^2}}$$

d) Derivamos e igualamos a cero: $h' = \frac{4x^3 \cdot x^2 - 2x(x^4 + 256)}{x^4} = \frac{x^4 - 256}{x^2 \sqrt{x^4 + 256}} = 0 \Rightarrow x = \pm 4$

Como es una longitud tomamos el valor positivo $x = 4$

e) Calculamos la segunda derivada para ver que valor corresponde al máximo.

$$h'' = \frac{4x^3 \cdot (x^2 \sqrt{x^4 + 256}) - \left(2x \cdot \sqrt{x^4 + 256} + x^2 \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + 256}}\right) \cdot (x^4 - 256)}{x^4(x^4 + 256)}$$

$$h''(x=4) = \frac{256 \cdot (16\sqrt{512}) - \left(8 \cdot \sqrt{512} + \frac{4096}{2\sqrt{512}}\right) \cdot 0}{256 \cdot 512} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}$$

Luego, las dimensiones de los catetos son: $x = 4 \text{ cm}$; $y = 4 \text{ cm}$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función derivable definida por: $f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{b}{x} + \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ donde \ln denota

el logaritmo neperiano

a) Calcula a y b .

b) Para $a = 3$ y $b = 2$ calcula los extremos absolutos de f en el intervalo $[0, e]$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la función es derivable en $x = 1$, primero tiene que ser continua en dicho punto, luego:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} a - x = a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b}{x} + \ln x = b \end{array} \right\} \Rightarrow a - 1 = b \Rightarrow a - b = 1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 1 \\ -\frac{b}{x^2} + \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Como es derivable en $x = 1$, se cumple que: $\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = -1 \\ f'(1^+) = -b + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 = -b + 1 \Rightarrow b = 2$

Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos que: $a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + 2 = 3$

b) Como es derivable, los extremos absolutos se encuentran en $x = 0$, $x = e$ y en los puntos donde se anula $f'(x)$.

- $f'(0) = -1 \neq 0 \Rightarrow$ No puede haber máximo o mínimo

- $f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 2$

- $x = 0 \Rightarrow f(0) = 3$

- $x = 2 \Rightarrow f(2) = 1 + \ln 2$

- $x = e \Rightarrow f(e) = \frac{2}{e} + 1$

Luego, el mínimo absoluto está en el punto $(2, 1 + \ln 2)$ y el máximo absoluto en el punto $(0, 3)$

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x \operatorname{sen}(x)}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Resolvemos la indeterminación aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x \operatorname{sen}(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \operatorname{sen} 3x - e^x + a}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \frac{-1 + a}{0}$$

Como nos dicen que el límite existe y, es finito, el numerador debe de ser igual a cero para poder seguir aplicando la regla de L'Hôpital, luego: $-1 + a = 0 \Rightarrow a = 1$.

Calculamos el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - e^x + x}{x \operatorname{sen}(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \operatorname{sen} 3x - e^x + 1}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9 \cos 3x - e^x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{-10}{2} = -5$$

De entre todos los números reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea mínima: $S_{\min} = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}$

b) Derivamos e igualamos a cero:

$$S'_{\min} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = -1$$

c) Comprobamos el valor que corresponde a un mínimo.

$$S''_{\min} = \frac{2x \cdot x^2 - 2x(x^2 - 1)}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$S''_{\min}(x=1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}$$

Luego, el número que nos piden es: $x=1$