PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2016

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-a\,sen\,x+x\cos(3x)}{x^2}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-a\,sen\,x+x\cos(3x)}{x^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow \text{Aplicamos la regla de L'Hôpital}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-a\cos x+\cos(3x)-3x\,sen(3x)}{2x}=\frac{1-a+1}{0}\Rightarrow a=2$$

Como dice que es finito, entonces, $a=2$ y podemos seguir aplicando la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-2\cos x+\cos(3x)-3x\,sen(3x)}{2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(x+1)^2}+2sen\,x-3\,sen(3x)-3\,sen(3x)-9x\cos(3x)}{2}=-\frac{1}{2}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.
a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*. Calcula los puntos de corte de dichas asíntotas con la gráfica de *f*.
b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento *f* y los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
c) Esboza la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R}$

Asíntotas Verticales: No tiene, ya que no hay ningún valor que anule el denominador

Asíntotas Horizontales: Calculamos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{\infty}=0$

Por lo tanto, $y=0$, es la asíntota horizontal

Asíntota Oblicua: No tiene, ya que tiene asíntota horizontal.

Calculamos el punto de corte de la asíntota con la función.

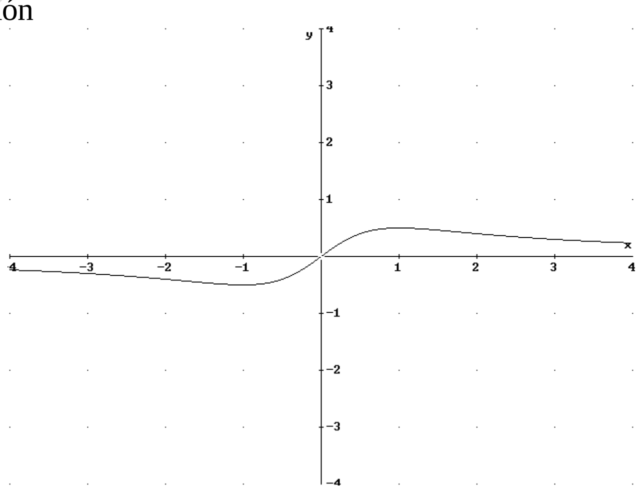
$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{x}{x^2+1}\\ y&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=0\Rightarrow P(0,0)$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y'=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow x=\pm 1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
Signo y'	—	+	—
Función	D	C	D

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y creciente en el intervalo $(-1,1)$. Tiene un máximo relativo en el punto $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ y un mínimo relativo en el punto $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$

c) Representamos la función



Sabiendo que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos(\pi x) \cdot (1 + a\cos(\pi x))}{sen(x^2)}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\pi x) \cdot (1 + a\cos(\pi x))}{sen(x^2)} = \frac{1 \cdot (1+a)}{0}$$

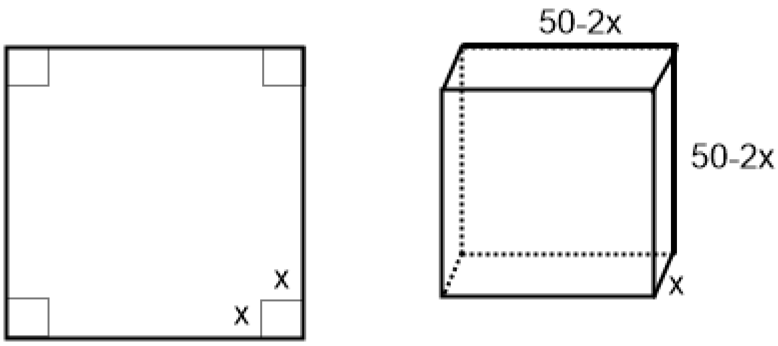
Como dice que es finito, entonces, $a = -1$ y podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\pi x) \cdot (1 + a\cos(\pi x))}{sen(x^2)} = \frac{1 \cdot (1-1)}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{-\pi\, sen(\pi x) \cdot (1 - \cos(\pi x)) + \cos(\pi x) \cdot \pi sen(\pi x)}{2x\cos(x^2)} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\pi^2 \cos \pi x \cdot (1 - \cos \pi x) + sen\, \pi x \cdot (-\pi \cdot sen\, \pi x) - \pi \cdot sen\, \pi x \cdot \pi \cdot sen\, \pi x + \cos \pi x \cdot \pi^2 \cos \pi x}{2\cos(x^2) - 4x^2\, sen(x^2)} = \frac{\pi^2}{2}$$

Se dispone de un cartón cuadrado de 50 cm de lado para construir una caja sin tapadera a partir del cartón. Para ello, se corta un cuadrado de x cm de lado en cada una de las esquinas. Halla el valor de *x* para que el volumen de la caja sea máximo y calcula dicho volumen.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) La función que queremos que sea mínimo es: $V=(50-2x)^2\cdot x=4x^3-200x^2+2500x$

b) Derivamos e igualamos a cero

$$V'=12x^2-400x+2500=0\Rightarrow x=25\ ;\ x=\frac{25}{3}$$

c) Calculamos la 2ª derivada y comprobamos el máximo

$V''=24x-400$

$V''(x=25)=200\Rightarrow$ mínimo. Es absurdo, ya que si quitamos en cada esquina un cuadrado de 25 cm de lado nos quedamos sin cartón para hacer la caja.

$V''\left(\frac{25}{3}\right)=-200\Rightarrow$ Máximo

Luego, $x=\frac{25}{3}cm$

Calculamos el volumen: $V=(50-2x)^2\cdot x=\left(50-2\cdot\frac{25}{3}\right)^2\cdot\frac{25}{3}=9.259'26\ cm^3$

Sea la función $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, donde ln denota logaritmo neperiano.
a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty \Rightarrow \text{Asíntota vertical } x=0^+$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{\infty}=0 \Rightarrow \text{Asíntota horizontal } y=0$$

No tiene asíntota oblicua ya que tiene horizontal

a) Calculamos la derivada e igualamos a cero.

$$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Rightarrow x=e$$

	(0,e)	(e,+ ∞)
Signo y'	+	—
Función	C	D

$\downarrow$

Máximo $\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$

Creciente: $(0,e)$

Decreciente: $(e,+\infty)$

Máximo relativo: $\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Determina *a, b, c* sabiendo que la gráfica de *f* tiene tangente horizontal en el punto de abscisa $x=1$ y un punto de inflexión en $(-1,5)$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Nos dan la función: $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \;;\; f''(x)=6x+2a$$

- Tangente horizontal en $x=1 \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 3\cdot 1^2+2a+b=0 \Rightarrow 2a+b+3=0$

- Punto de inflexión en $(-1,5) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} Pasa\ por\ (-1,5) \Rightarrow (-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+c=5 \Rightarrow a-b+c-6=0 \\ f''(-1)=0 \Rightarrow 6\cdot(-1)+2a=0 \Rightarrow 2a-6=0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} 2a+b+3=0 \\ a-b+c-6=0 \\ 2a-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=3 \;;\; b=-9 \;;\; c=-6$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(e^{ax}+b)x$, con $a\neq 0$. Calcula a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $x=0$ y su gráfica, un punto de inflexión en el punto cuya abscisa es $x=1$.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera y segunda derivada de $f(x)=(e^{ax}+b)x$

$$f'(x)=ae^{ax}\cdot x+e^{ax}+b \ ; \ f''(x)=a^2e^{ax}\cdot x+ae^{ax}+ae^{ax}=a^2e^{ax}\cdot x+2ae^{ax}=ae^{ax}(ax+2)$$

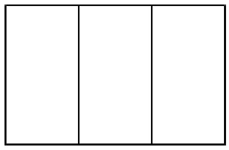
Vamos aplicando las condiciones del problema.

- Extremo relativo en $x=0 \Rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow 1+b=0$

- Punto de inflexión en $x=1 \Rightarrow f''(1)=0 \Rightarrow ae^{a}(a+2)=0$

Resolviendo las dos ecuaciones, tenemos: $a=-2$; $b=-1$

De un terreno se desea vender un solar rectangular de 12.800 m^2 dividido en tres parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo. Si se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas), determina las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Llamamos x a la longitud e y al ancho del solar.

Paso 1: Escribimos la función que queremos que sea mínima: $L_{\min} = 2x + 4y$

Paso 2: Escribimos la relación entre las variables: $x \cdot y = 12.800$; $y = \dfrac{12.800}{x}$

Paso 3: Sustituimos: $L_{\min} = 2x + 4y = 2x + 4 \cdot \dfrac{12.800}{x} = 2x + \dfrac{51.200}{x}$

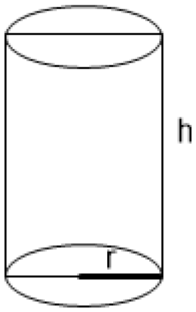
Paso 4: Derivamos e igualamos a cero: $L'_{\min} = 2 - \dfrac{51.200}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 160$

Paso 5: Calculamos la 2ª derivada.

$$L'' = \frac{102.400}{x^3} \Rightarrow \begin{cases} L''(x=160) = 0'025 \Rightarrow \text{mínimo} \\ L''(x=-160) = -0'025 \Rightarrow \text{Máximo} \end{cases}$$

Luego las dimensiones del solar son x = 160 m ; y = 80 m

Se quiere construir un bote de conservas cilíndrico, con tapa, de un litro de capacidad. Calcula las dimensiones del bote para que en su construcción se utilice la menor cantidad posible de hojalata.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.



a) Función que queremos que sea mínima es: $S_{\min} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

b) Relación entre las variables: $V = \pi r^2 h = 1.000 \Rightarrow h = \dfrac{1.000}{\pi r^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea mínima con una sola variable.

$$S_{\min} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1.000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2.000}{r}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\min} = 4\pi r - \frac{2.000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2.000}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{2.000}{4\pi}} = 5'41\ cm$$

e) Comprobamos que corresponde a un mínimo:

$$S''_{\min} = \frac{12\pi r^2 \cdot r^2 - 2r(4\pi r^3 - 2000)}{r^4} = \frac{4\pi r^3 + 4000}{r^3}$$

$$S''(r = 5'41) = \frac{4\pi(5'41)^3 + 4000}{(5'41)^3} > 0 \Rightarrow \text{ Mínimo}$$

Luego, las dimensiones del depósito son: $r = 5'41\ cm$ y $h = \dfrac{1000}{\pi(5'41)^2} = 10'87\ cm$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\left|x^2-4\right|$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

a) Lo primero que hacemos es abrir la función.

$$f(x)=\left|x^2-4\right|=\begin{cases} x^2-4 & si \quad x\leq -2 \\ 4-x^2 & si \quad -2<x<2 \\ x^2-4 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Igualamos a cero la primera derivada:

$$2x=0\Rightarrow x=0$$
$$-2x=0\Rightarrow x=0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Signo y'	—	+	—	+
Función	D	C	D	C

$\downarrow$ Pico $(-2,0)$ $\quad\downarrow$ Máximo $\quad\downarrow$ Pico $(2,0)$

Creciente en el intervalo: $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

Decreciente en el intervalo: $(-\infty,2)\cup(0,2)$

Máximo en $(0,4)$ y mínimos en $(-2,0)$ y $(2,0)$

b) Calculamos la ecuación de la recta tangente.

$$y-f(-1)=f'(-1)\cdot(x+1)\Rightarrow y-3=2(x+1)\Rightarrow y=2x+5$$

La ecuación de la normal es

$$y-f(-1)=-\frac{1}{f'(-1)}f'(-1)\cdot(x+1)\Rightarrow y-3=-\frac{1}{2}(x+1)\Rightarrow x+2y-5=0$$

Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)$ es finito, calcula m y el valor del límite.

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Aplicamos la regla de L'Hôpital y como el límite es finito el numerador debe valer cero

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\frac{2x-me^x+m}{2x(e^x-1)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2-me^x}{2(e^x-1)+2xe^x}\Rightarrow 2-me^x=0\Rightarrow m=2$$

Calculamos el valor del límite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\frac{2x-me^x+m}{2x(e^x-1)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2-me^x}{2(e^x-1)+2xe^x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-me^x}{2e^x+2e^x+2xe^x}=\frac{-m}{4}=-\frac{1}{2}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2\cdot e^{-x^2}$
a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
c) Esboza la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x)=x^2\cdot e^{-x^2}$, no tiene asíntota vertical ya que su dominio es $\mathbb{R}$.

Vamos a ver si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x\cdot e^{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}=\frac{2}{\infty}=0$$

Por lo tanto, la asíntota horizontal es $y=0$.

Como tiene asíntota horizontal, no puede tener asíntota oblicua.

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{2x\cdot e^{x^2}-2x\cdot e^{x^2}\cdot x^2}{(e^{x^2})^2}=\frac{2x-2x^3}{e^{x^2}}=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=1\ ;\ x=-1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Signo y'	+	—	+	—
Función	C	D	C	D

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

Máximo $\left(-1,\frac{1}{e}\right)$ mínimo $(0,0)$ Máximo $\left(1,\frac{1}{e}\right)$

c)