EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2018

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

Halla los coeficientes *a*, *b* y *c* sabiendo que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene en $x=1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica de f pasa por el punto $(1,1)$..
MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Si no es extremo relativo, será un punto de inflexión, luego: $f''(1)=0$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1\Rightarrow 1+a+b+c=1 \\ f'(1)=0\Rightarrow 3+2a+b=0 \\ f''(1)=0\Rightarrow 6+2a=0 \end{array}\right\}\Rightarrow a=-3\ ;\ b=3\ ;\ c=0$$

Luego la función es: $f(x)=x^3-3x^2+3x$

Determina $k \neq 0$ sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & si \quad x \le 1 \\ \dfrac{2}{kx} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

es derivable.
MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Como la función es derivable, también es continua. Estudiamos la continuidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 3 - k \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (3 - kx^2) = 3 - k \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{2}{kx} \right) = \dfrac{2}{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 3 - k = \frac{2}{k} \Rightarrow k = 2 \; ; \; k = 1$$

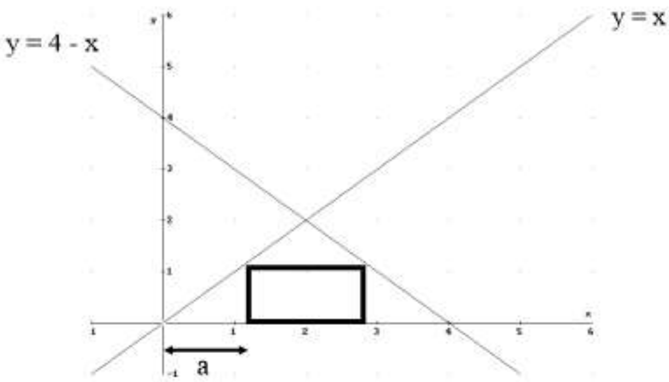
Calculamos la derivada: $f'(x) = \begin{cases} -2kx & si \quad x \le 1 \\ -\dfrac{2}{kx^2} & si \quad x > 1 \end{cases}$

Y como es derivable, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -2k \\ f'(1^+) = -\dfrac{2}{k} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow -2k = -\frac{2}{k} \Rightarrow k = \pm 1$$

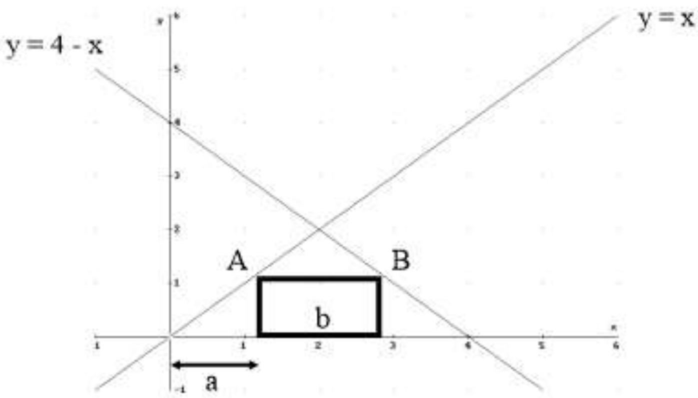
Luego, el único valor posible es $k = 1$:

Se desea construir un rectángulo, como el de la figura, de área máxima. La base está situada sobre el eje OX, un vértice está en la recta $y = x$ y el otro, en la recta $y = 4 - x$. Se pide:
a) Halla la altura del rectángulo en función de *a* (ver figura).
b) Halla la base del rectángulo en función de *a*.
c) Encuentra el valor de *a* que hace máximo el área del rectángulo.



MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) El vértice A tiene de coordenadas (a, a), ya que es un punto de la recta $y = x$. Por lo tanto, la altura del rectángulo es a.

b) El vértice B tiene de coordenadas $(b + a, a)$, y como es un punto de la recta $y = 4 - x$, se cumple que: $a = 4 - (b + a) \Rightarrow b = 4 - 2a$.

c) La función que queremos que sea máximo es: $S_{max} = (4 - 2a) \cdot a = 4a - 2a^2$

Derivamos e igualamos a cero: $S'_{max} = 4 - 4a = 0 \Rightarrow a = 1$

Luego, el área es máxima cuando $a = 1$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} -xe^{x-1} & si \quad x\le 0 \\ xe^{x-1} & si \quad 0<x\le 1 \\ xe^{1-x} & si \quad 1<x \end{cases}$$

a) Estudia la derivabilidad de *f* en $x=0$ y en $x=1$.
b) Estudia la existencia de asíntotas horizontales de la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Primero estudiamos la continuidad de la función.

Estudiamos la continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} -xe^{x-1}=0 \\ \lim_{x\to 0^+} xe^{x-1}=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \Rightarrow \text{Continua en } x=0$$

Estudiamos la continuidad en $x=1$:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} xe^{x-1}=1 \\ \lim_{x\to 1^+} xe^{1-x}=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(1) \Rightarrow \text{Continua en } x=1$$

Calculamos la función derivada: $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}(-1-x) & si \quad x<0 \\ e^{x-1}(1+x) & si \quad 0<x<1 \\ e^{1-x}(1-x) & si \quad 1<x \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$:

$$\left.\begin{aligned} f'(0^-)=e^{-1}\cdot(-1)=-\frac{1}{e} \\ f'(0^+)=e^{-1}\cdot(1)=\frac{1}{e} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(0^-)\neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No derivable}$$

Estudiamos la derivabilidad en $x=1$:

$$\left.\begin{aligned} f'(1^-)=e^{0}\cdot 2=2 \\ f'(1^+)=e^{0}\cdot 0=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(1^-)\neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No derivable}$$

b) Calculamos las asíntotas horizontales

$\lim_{x\to -\infty} -xe^{x-1}=\infty\cdot 0=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x}{e^{1-x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-1}{-e^{1-x}}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow$ $y=0$ es una asíntota horizontal en $-\infty$

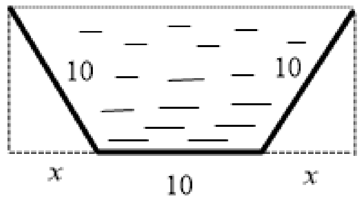
$\lim_{x\to +\infty} xe^{1-x}=\infty\cdot 0=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{e^{x-1}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow$ $y=0$ es una asíntota horizontal en $+\infty$

Se desea construir una canaleta, para la recogida de agua, cuya sección es como la de la figura. La base y los costados deben medir 10 cm y se trata de darle la inclinación adecuada a los costados para obtener una sección de área máxima. Se pide:

a) Halla la altura de la canaleta en función de *x* (ver la figura).

b) Halla el área de la sección de la canaleta en función de *x*.

c) Encuentra el valor de *x* que hace máximo dicho área.



MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Aplicando Pitágoras, vemos que $h=\sqrt{100-x^2}$

b) Área de la canaleta = Área del rectángulo – 2 Área del triángulo

$$S=(10+2x)\cdot\sqrt{100-x^2}-2\cdot\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{100-x^2}=(10+x)\cdot\sqrt{100-x^2}$$

c) Derivamos e igualamos a cero

$$S'=\sqrt{100-x^2}+(10+x)\cdot\frac{-2x}{2\cdot\sqrt{100-x^2}}=\frac{100-x^2-10x-x^2}{\sqrt{100-x^2}}=\frac{-2x^2-10x+100}{\sqrt{100-x^2}}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x^2-10x+100=0\Rightarrow x=5\ ;\ x=-10$$

Luego, el máximo es para $x=5\ cm$

Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$ para $x\neq 1$.

a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y halla sus máximos y mínimos relativos (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

c) Esboza la gráfica de f indicando sus puntos de corte con los ejes coordenados

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R}-\{1\}$

Asíntotas Verticales: La recta $x=1$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x\to 1} f(x)=\pm\infty$

Asíntotas Horizontales: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{e^{\infty}}{\infty}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1}=\infty\Rightarrow$ No tiene

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{e^{-\infty}}{-\infty}=\frac{0}{-\infty}=0\Rightarrow y=0$$

Luego, $y=0$ es una asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

Al tener asíntota horizontal, no tiene asíntota oblicua.

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y'=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}=0\Rightarrow x=2$

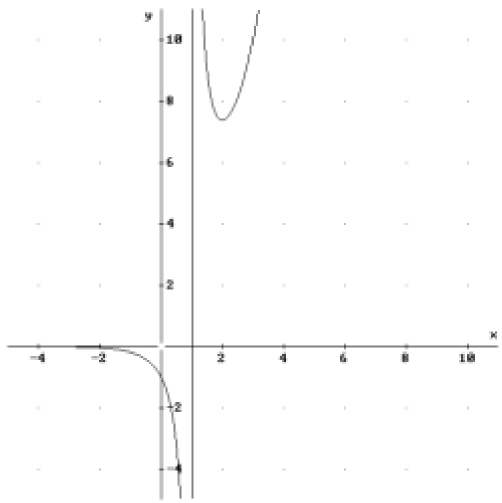
	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
Signo y'	—	—	+
Función	D	D	C

$\downarrow$ No existe $\quad\downarrow$ mínimo $(2,e^2)$

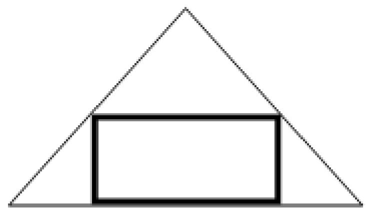
Creciente: $(2,+\infty)$. Decreciente: $(-\infty,1)\cup(1,2)$. Mínimo en $(2,e^2)$

c) Corte con el eje X: $y=0\Rightarrow e^x=0\Rightarrow$ No corta

Corte con el eje Y: $x=0\Rightarrow y=\dfrac{e^0}{-1}=-1\Rightarrow(0,-1)$

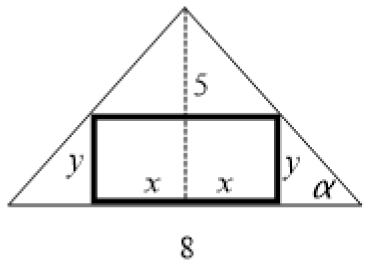


Considera un triángulo isósceles en el que el lado desigual mide 8 cm y la altura correspondiente mide 5 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en dicho triángulo (ver figura).



MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máxima: $S_{\max} = 2xy$

b) Relación entre las variables: $\dfrac{5-y}{x} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow 20 - 4y = 5x \Rightarrow y = \dfrac{20-5x}{4}$

$$S_{\max} = 2xy = 2x \cdot \frac{20-5x}{4} = \frac{40x - 10x^2}{4} = \frac{20x - 5x^2}{2}$$

c) Derivamos e igualamos a cero:

$$S'_{\max} = \frac{20-10x}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{20}{10} = 2$$

d) Comprobamos que corresponde a un máximo

$S''_{\max} = \dfrac{-10}{2} < 0 \Rightarrow$ corresponde a un máximo independientemente del valor de x

Luego, las dimensiones del rectángulo son base $= 2x = 4\,cm$; altura $= y = \dfrac{5}{2}\,cm$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ función definida por $f(x)=x+xe^{-x}$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que es paralela a la recta $x-y+1=0$.

b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta $x-y+1=0\Rightarrow y=x+1$ tiene de pendiente 1. La recta tangente como es paralela también tiene de pendiente 1, luego:

$$f'(x)=1\Rightarrow f'(x)=1+e^{-x}-x\cdot e^{-x}=1+(1-x)\cdot e^{-x}=1\Rightarrow 1-x=0\Rightarrow x=1$$

La ecuación de la recta tangente en $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

Y como: $f(1)=1+\dfrac{1}{e}$

Luego, la recta tangente en $x=1$ es $y-1-\dfrac{1}{e}=1\cdot(x-1)\Rightarrow y=x-1+1+\dfrac{1}{e}\Rightarrow y=x+\dfrac{1}{e}$

b) La función $f(x)=x+xe^{-x}=x+\dfrac{x}{e^x}=\dfrac{x\cdot(e^x+1)}{e^x}$, no tiene asíntota vertical ya que no hay ningún valor de x que anule el denominador.

Vamos a ver si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot(e^x+1)}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1\cdot(e^x+1)+x\cdot e^x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\cdot(1+x)+1}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\cdot(1+x)+e^x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}(1+x)+1=+\infty\Rightarrow \textit{No tiene}$$

$$\lim_{x\to-\infty}=x+xe^{-x}=-\infty\Rightarrow \textit{No tiene}$$

Calculamos la asíntota oblicua $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x\cdot(e^x+1)}{e^x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\cdot(e^x+1)}{e^x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\cdot e^x+x-x\cdot e^x}{e^x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right)=\frac{1}{\infty}=0$$

Luego, la asíntota oblicua es: $y=x$

Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(x) - x}{x - sen(x)}$

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

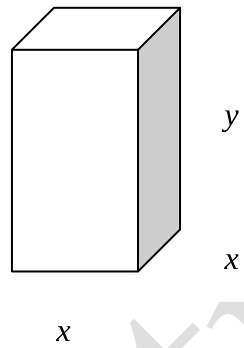
Como $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\, x - x}{x - sen\, x} = \dfrac{0}{0}$, le aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x - x}{x - sen\, x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x - \cos^3 x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x \cdot sen\, x}{-2\cos x \cdot sen\, x + 3\cos^2 x \cdot sen\, x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{-2 + 3\cos x} = \frac{2}{-2+3} = 2$$

Se desea construir una caja sin tapadera de base cuadrada. El precio del material es de 18 euros/m^2 para los laterales y de 24 euros/m^2 para la base. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir si disponemos de 50 euros.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo es: $V_{max} = x^2 \cdot y$

b) Relación entre las variables: $50 = 24 \cdot x^2 + 18 \cdot 4xy = 24x^2 + 72xy \Rightarrow y = \dfrac{50 - 24x^2}{72x}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$V_{max} = x^2 \cdot y = x^2 \cdot \frac{50 - 24x^2}{72x} = \frac{50x - 24x^3}{72}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$V'_{max} = \frac{50 - 72x^2}{72} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{50}{72}} = \pm\frac{5}{6}$$

e) Comprobamos que es máximo

$$V'' = \frac{-144x}{72} \Rightarrow V''\left(x = \frac{5}{6}\right) = -\frac{5}{3} < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

Luego, las dimensiones son: $x = \dfrac{5}{6}\ m$; $y = \dfrac{5}{9}\ m$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-sen(x)} & si \quad x>0 \end{cases}$.

Determina *a*, *b* y *c* sabiendo que *f* es continua, alcanza su máximo relativo en $x=-1$ y la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-2$ tiene pendiente 2.

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Continua en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} ax^2+bx+c=c \\ \lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-sen\,x}=\dfrac{0}{0}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\dfrac{0}{0}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-e^{-x}}{sen\,x}=\dfrac{0}{0}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2 \end{array}\right\}\Rightarrow c=2$$

Máximo en $x=-1\Rightarrow f'(-1)=0\Rightarrow -2a+b=0$

La recta tangente a *f* en el punto de abscisa $x=-2$ tiene pendiente $2\Rightarrow f'(-2)=2\Rightarrow -4a+b=2$.

Resolviendo el sistema $\left.\begin{array}{r} -2a+b=0 \\ -4a+b=2 \end{array}\right\}\Rightarrow a=-1\,;\, b=-2$

Luego, $a=-1\,;\, b=-2\,;\, c=2$

Considera la función f definida por $f(x)=a\ln(x)+bx^2+x$ para $x>0$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.
a) Halla a y b sabiendo que f tiene extremos relativos en $x=1$ y en $x=2$.
b) ¿Qué tipo de extremos tiene f en $x=1$ y en $x=2$?
MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x)=a\cdot\frac{1}{x}+2bx+1$$

- Extremo relativo en $x=1\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow a+2b+1=0$

- Extremo relativo en $x=2\Rightarrow f'(2)=0\Rightarrow \frac{a}{2}+4b+1=0$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones sale que: $a=-\frac{2}{3}$; $b=-\frac{1}{6}$

b) Calculamos la segunda derivada: $f''(x)=-\frac{a}{x^2}+2b=\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}$

$f''(1)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}>0\Rightarrow$ Mínimo relativo

$f''(2)=\frac{2}{12}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}<0\Rightarrow$ Máximo relativo