PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2002

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que $P(0)=P(2)=1$ y $\int_0^2 P(x)\,dx=\frac{1}{3}$

MATEMÁTICAS II. 2002. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

El polinomio que queremos hallar será de la forma: $P(x)=ax^2+bx+c$

- $P(0)=1 \Rightarrow c=1$

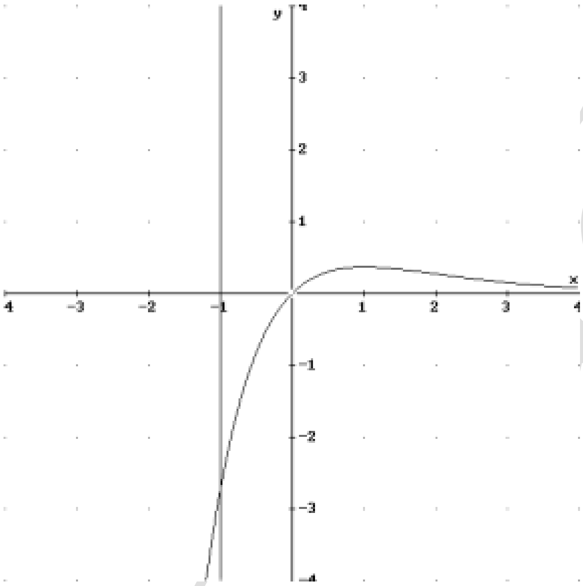
- $P(2)=1 \Rightarrow 4a+2b+1=1 \Rightarrow 4a+2b=0$

- $\int_0^2 (ax^2+bx+1)\,dx=\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+x\right]_0^2=\frac{8a}{3}+2b+2=\frac{1}{3}$

Resolviendo el sistema sale que: $P(x)=\frac{5}{4}x^2-\frac{5}{2}x+1$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=x\cdot e^{-x}$. Esboza el recinto limitado por la curva $y=f(x)$, los ejes coordenados y la recta $x=-1$. Calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2002. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



$$A=\int_{-1}^{0}-xe^{-x}\,dx=\left[x\cdot e^{-x}+e^{-x}\right]_{-1}^{0}=1\,u^2$$

Sea $Ln(x)$ el logaritmo neperiano de x y sea $f: D \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{1}{x(Ln(x))^2}$

a) Determina el conjunto D sabiendo que está formado por todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ para los que existe $f(x)$.

b) Usa el cambio de variable $t = Ln(x)$ para calcular una primitiva de *f*.

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $Ln(x)$ sólo existe para $x>0$, por tanto, el dominio de $f(x)=\dfrac{1}{x(Ln(x))^2}$ puesto que es un cociente, aparte de considerar los números $x>0$ hemos de quitar aquellos que anulan el denominador que en nuestro caso es $x=1$, ya que $Ln(1)=0$. Luego el dominio pedido es $(0,1)\cup(1,\infty)$.

b) Hacemos el cambio $t = Ln(x) \Rightarrow dt = \dfrac{1}{x}dx \Rightarrow dx = x \cdot dt$

$$\int \frac{1}{x(Ln(x))^2}dx = \int \frac{x\cdot dt}{x\cdot t^2} = \int t^{-2}\,dt = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{Ln(x)} + C$$

Calcula $\int \dfrac{x^3+2x^2-2x+3}{x^2-1}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{x^3+2x^2-2x+3}{x^2-1}\,dx = \int (x+2)\,dx + \int \frac{-x+5}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2}+2x+\int \frac{-x+5}{x^2-1}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-1=0 \Rightarrow x=-1\ ;\ x=1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-x+5}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1 \Rightarrow 4=2A \Rightarrow A=2$$

$$x=-1 \Rightarrow 6=-2B \Rightarrow B=-3$$

Con lo cual:

$$\int \frac{x^3+2x^2-2x+3}{x^2-1}\,dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int \frac{2}{x-1}\,dx+\int \frac{-3}{x+1}\,dx=\frac{x^2}{2}+2x+2\ln(x-1)-3\ln(x+1)+C$$

a) Determina la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f'(x)=2x^3-6x^2$ y que su valor mínimo es -12.
b) Calcula la ecuación de las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de inflexión de su gráfica.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Los posibles máximos o mínimos son las soluciones de la ecuación:

$$f'(x)=2x^3-6x^2=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=3$$

El mínimo está en $x=3$, ya que $f''(3)=6\cdot 3^2-12\cdot 3=54-36=18>0$

$$f(x)=\int(2x^3-6x^2)\,dx=\frac{x^4}{2}-2x^3+C$$

Como $f(3)=-12\Rightarrow \dfrac{3^4}{2}-2\cdot 3^3+C=-12\Rightarrow C=\dfrac{3}{2}$

Luego, la función es: $f(x)=\dfrac{x^4}{2}-2x^3+\dfrac{3}{2}$

b) Calculamos los puntos de inflexión igualando la segunda derivada a cero.

$$f''(x)=6x^2-12x=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=2$$

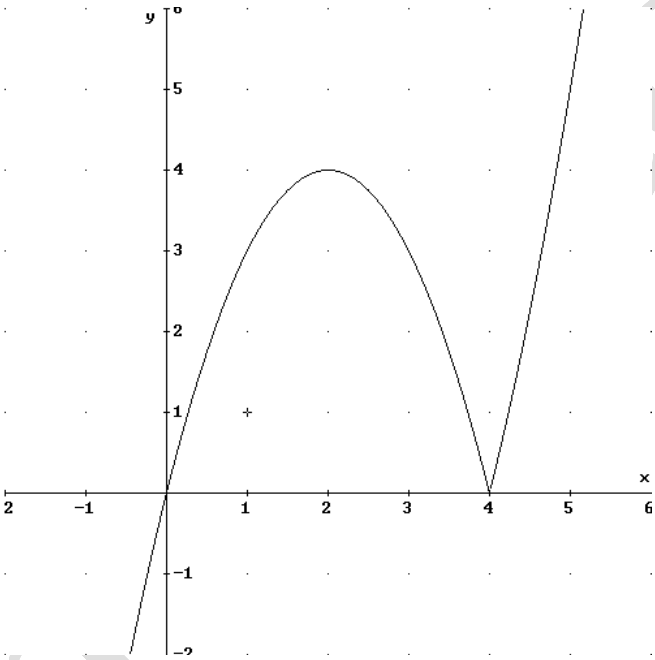
$$\left.\begin{array}{l} x_0=0\\ f(x_0)=\dfrac{3}{2}\\ f'(x_0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)\Rightarrow y=\frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0=2\\ f(x_0)=-\dfrac{13}{2}\\ f'(x_0)=-8\end{array}\right\}\Rightarrow y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)\Rightarrow y+\frac{13}{2}=-8(x-2)\Rightarrow y=\frac{-16x+19}{2}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x|x-4|$.
a) Esboza la gráfica de *f*.
b) Estudia su derivabilidad en $x=4$.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La gráfica de $f(x)=x|x-4|$ es:



b) Abrimos la función: $f(x)=x|x-4|=\begin{cases}-x^2+4x & si \quad x\le 4\\ x^2-4x & si \quad x>4\end{cases}$

Como la función es continua en $x=4$, estudiamos la derivabilidad en $x=4$.

$$f'(x)=\begin{cases}-2x+4 & si \quad x<4\\ 2x-4 & si \quad x>4\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(4^-)=-4\\ f'(4^+)=\ \ 4\end{array}\right\}\Rightarrow f'(4^-)\ne f'(4^+)\Rightarrow \text{No derivable}$$

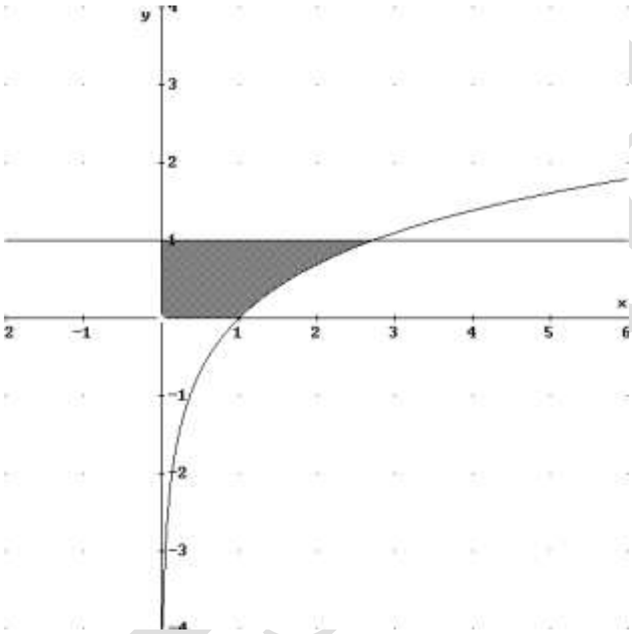
c)

$$A=\int_0^4(-x^2+4x)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_0^4=-\frac{64}{3}+32=\frac{32}{3}\ u^2$$

Sea $Ln(x)$ el logaritmo neperiano de x. Esboza el recinto limitado por los ejes coordenados y las gráficas de las funciones $y=1$ e $y=Ln(x)$. Calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El recinto es:



b) Calculamos el área.

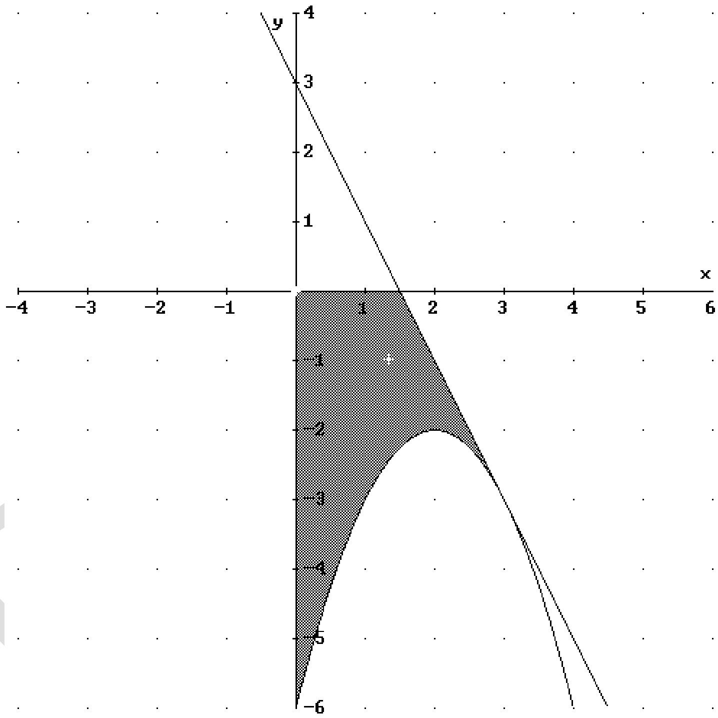
$$A=1+\int_{1}^{e}(1-\ln x)\,dx=1+\left[2x-x\ln x\right]_{1}^{e}=e-1\ u^{2}$$

Esboza el recinto limitado por la gráfica de la parábola $y=-(x-2)^2-2$, la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa $x=3$, el semieje positivo de abscisas y el semieje negativo de ordenadas. Calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la recta tangente a la parábola $y=-(x-2)^2-2=-x^2+4x-6$. La ecuación de la recta tangente será: $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

$$\left.\begin{array}{l} x_0=3 \\ f(x_0)=-3 \\ f'(x_0)=-2 \end{array}\right\} y+3=-2\cdot(x-3)\Rightarrow y=-2x+3$$



Calculamos el área.

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}(x^2-4x+6)\,dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}(-2x+3+x^2-4x+6)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+6x\right]_0^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_{\frac{3}{2}}^{3}=\frac{27}{4}\,u^2$$

Calcula una primitiva de la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{2x^2+10x}{x^2+2x-3}$ para $x\neq 1$ y $x\neq -3$.

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{2x^2+10x}{x^2+2x-3}\,dx=\int 2\,dx+\int \frac{6x+6}{x^2+2x-3}\,dx=2x+\int \frac{6x+6}{x^2+2x-3}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2+2x-3=0\Rightarrow x=1\,;\; x=-3$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{6x+6}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1\Rightarrow 12=4A\Rightarrow A=3$$

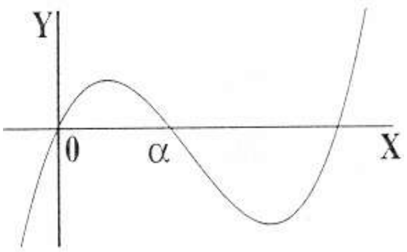
$$x=-3\Rightarrow -12=-4B\Rightarrow B=3$$

Con lo cual:

$$\int \frac{2x^2+10x}{x^2+2x-3}\,dx=2x+\int \frac{3}{x-1}\,dx+\int \frac{3}{x+3}\,dx=2x+3\ln(x-1)+3\ln(x+3)+C$$

Consideremos $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

a) Si f fuese la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:



i) $F(\alpha)=0$
ii) $F'(\alpha)=0$
iii) F es creciente en $(0,\alpha)$ $(0,\alpha)$

b) Calcula $F(1)$ siendo $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t+1}}$

MATEMÁTICAS II. 2002. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1 OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

i) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(t)\,dt \neq 0$ porque nos daría el área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX entre $x=0$ y $x=\alpha$.

ii) $F'(x)=\left[\int_0^{\alpha} f(t)\,dt\right]' = f(x)$, según el teorema fundamental del calculo integral, luego $F'(\alpha)= f(\alpha)$ y según la gráfica se observa que $f(\alpha)=0$.

iii) F es creciente en $(0,\alpha)$ si y solo si $F'(x)>0$ en $(0,\alpha)$, pero $F'(x)= f(x)$ que es mayor que cero en $(0,\alpha)$, luego $F(x)$ es creciente en dicho intervalo.

b) Si hacemos el cambio $t+1=x^2 \Rightarrow dt=2x\,dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t+1}}\,dt=\int \frac{2x\,dx}{x}=2\int dx=2x=2\sqrt{t+1}$$

$$F(1)=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t+1}}\,dt=\left[2\sqrt{t+1}\right]_0^1=2\sqrt{2}-2$$

Calcula $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^3+1}{x^2-x-2}dx$

MATEMÁTICAS II. 2002. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{3x^3+1}{x^2-x-2}dx = \int (3x+3)\,dx + \int \frac{9x+7}{x^2-x-2}dx = \frac{3x^2}{2}+3x+\int \frac{9x+7}{x^2-x-2}dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-x-2=0 \Rightarrow x=-1\ ;\ x=2$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{9x+7}{x^2-x-2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=-1 \Rightarrow -2=-3A \Rightarrow A=\frac{2}{3}$$

$$x=2 \Rightarrow 25=3B \Rightarrow B=\frac{25}{3}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{3x^3+1}{x^2-x-2}dx = \int (3x+3)\,dx + \int \frac{9x+7}{x^2-x-2}dx = \frac{3x^2}{2}+3x+\int \frac{9x+7}{x^2-x-2}dx =$$

$$=\frac{3x^2}{2}+3x+\int \frac{\frac{2}{3}}{x+1}dx+\int \frac{\frac{25}{3}}{x-2}dx=\frac{3x^2}{2}+3x+\frac{2}{3}\ln(x+1)+\frac{25}{3}\ln(x-2)$$

Por lo tanto, la integral que nos piden valdrá:

$$\int_0^1 \frac{3x^3+1}{x^2-x-2}dx=\left[\frac{3x^2}{2}+3x+\frac{2}{3}\ln(x+1)+\frac{25}{3}\ln(x-2)\right]_0^1=$$

$$\left[\frac{3}{2}+3+\frac{2}{3}\ln(2)+\frac{25}{3}\ln(-1)\right]-\left[\frac{2}{3}\ln(1)+\frac{25}{3}\ln(-2)\right]=\frac{9}{2}-\frac{23}{3}\ln 2$$