

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A

Sea $\ln(1-x^2)$ el logaritmo neperiano de $1-x^2$ y sea $f : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(1-x^2)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0,1)$.
MATEMÁTICAS II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral, que es una integral por partes.

$$u = \ln(1-x^2); \quad du = \frac{-2x}{1-x^2} dx$$

$$dv = dx; \quad v = x$$

$$\int \ln(1-x^2) dx = x \ln|1-x^2| + 2 \int \frac{x^2}{1-x^2} dx$$

Hacemos la integral racional $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$. Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx = \int -1 dx + \int \frac{1}{1-x^2} dx = -x + \int \frac{1}{1-x^2} dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $1-x^2 \Rightarrow x = -1; x = 1$

Descomponemos en fracciones simples: $\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A(1-x) + B(1+x)}{(1+x)(1-x)}$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x = -1 \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = 2B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx = -x + \int \frac{1}{1-x^2} dx = -x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x} dx = -x + \frac{1}{2} \ln|1+x| - \frac{1}{2} \ln|1-x|$$

Por lo tanto la integral que nos pedían es:

$$\begin{aligned} \int \ln(1-x^2) dx &= x \ln(1-x^2) + 2 \int \frac{x^2}{1-x^2} dx = x \ln|1-x^2| + 2 \left(-x + \frac{1}{2} \ln|1+x| - \frac{1}{2} \ln|1-x| \right) = \\ &= x \ln|1-x^2| - 2x + \ln|1+x| - \ln|1-x| + C \end{aligned}$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $(0,1)$.

$$1 = 0 \cdot \ln 1 - 0 + \ln 1 - \ln| -1 | + C \Rightarrow C = 1$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x) = x \ln|1-x^2| - 2x + \ln|1+x| - \ln|1-x| + 1$

Dadas la parábola de ecuación $y = 1 + x^2$ y la recta de ecuación $y = 1 + x$, se pide:

a) Área de la región limitada por la recta y la parábola.

b) Ecuación de la recta paralela a la dada que es tangente a la parábola.

MATEMÁTICAS II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = 1 + x^2 \\ y = 1 + x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 1$$

El área que nos piden es:

$$A = \int_0^1 [(1+x) - (1+x^2)] dx = \int_0^1 [x - x^2] dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} u^2$$

b) La pendiente de la recta que nos dan es 1, luego:

$$y' = 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Calculamos la recta tangente que pasa por el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ y tiene de pendiente 1.

$$y - \frac{5}{4} = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{4x+3}{4}$$

Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 0$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = -1$. Conociendo además que $\int_0^1 f(x) dx = 6$, halla a , b y c .

MATEMÁTICAS II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera y segunda derivada de la función.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b ; f''(x) = 6x + 2a$$

Vamos aplicando las condiciones del problema.

- Extremo relativo en $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$

- Punto de inflexión en $x = -1 \Rightarrow f''(-1) = 0 \Rightarrow -6 + 2a = 0 \Rightarrow a = 3$

- $\int_0^1 f(x) dx = 6 \Rightarrow \int_0^1 (x^3 + 3x^2 + c) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} + cx \right]_0^1 = \frac{1}{4} + 1 + c = 6 \Rightarrow c = \frac{19}{4}$

Luego, $a = 3 ; b = 0 ; c = \frac{19}{4}$

Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y su recta tangente en el punto de abscisa correspondiente al máximo relativo de la función.

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos las coordenadas del máximo de la función.

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 ; f''(1) = 12 > 0 \Rightarrow \text{mínimo} ; f''(-1) = -12 < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

Luego, el máximo está en el punto $P(-1, 8)$. La pendiente valdrá $f'(-1) = 6(-1)^2 - 6 = 0 \Rightarrow m = 0$.

Por lo tanto, la recta tangente tiene de ecuación: $y - 8 = 0 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = 8$

Calculamos el área que nos piden.

$$A = \int_{-1}^2 (8 - 2x^3 + 6x - 4) dx = \left[-\frac{2x^4}{4} + \frac{6x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^2 = \left[-\frac{32}{4} + \frac{24}{2} + 8 \right] - \left[-\frac{2}{4} + \frac{6}{2} - 4 \right] = \frac{27}{2} u^2$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = 6 - x^2$; $g(x) = |x|$ $x \in \mathbb{R}$.

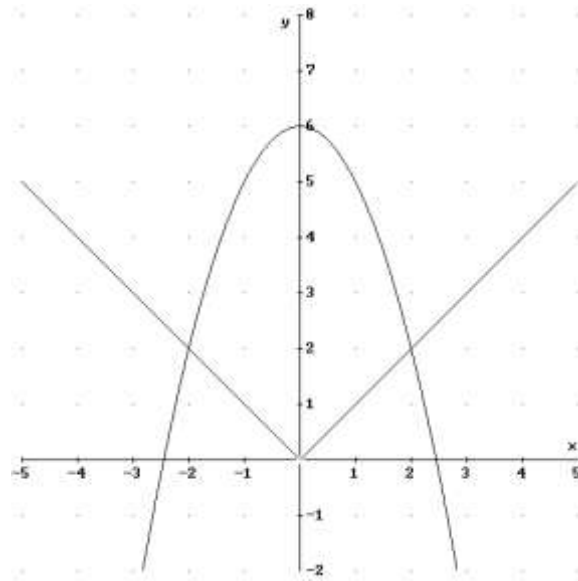
a) Dibuja el recinto limitado por las gráficas de f y g .

b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



b)

$$- A = 2 \cdot \int_0^2 (6 - x^2 - x) dx = 2 \cdot \left[6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 24 - \frac{16}{3} - 4 = \frac{44}{3} u^2$$

Se sabe que la función $f : (0,3) \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en todo punto de su dominio, siendo

$$f'(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ -x+3 & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases} \text{ y que } f(1) = 0. \text{ Halla la expresión analítica de } f.$$

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Integramos para calcular la expresión de $f(x)$, que será: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + C & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{2} + 3x + D & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases}.$

A continuación aplicamos las condiciones del problema para calcular C y D .

$$f(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - 1 + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

La función tiene que ser continua, luego:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} -\frac{x^2}{2} + 3x + D = 4 + D \end{array} \right\} \Rightarrow 4 + D = \frac{1}{2} \Rightarrow D = -\frac{7}{2}$$

Por lo tanto, la expresión de f es: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{7}{2} & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases}.$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , la recta tangente obtenida y el eje OY.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El punto tiene de coordenadas $P(3,5)$. La pendiente valdrá $f'(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4 \Rightarrow m = 4$.

Por lo tanto, la recta tangente tiene de ecuación: $y - 5 = 4 \cdot (x - 3) \Rightarrow y = 4x - 7$

b) Calculamos el área que nos piden.

$$A = \int_0^3 [(x^2 - 2x + 2) - (4x - 7)] dx = \int_0^3 [x^2 - 6x + 9] dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 9x \right]_0^3 = \left[\frac{27}{3} - \frac{54}{2} + 27 \right] = 9 \text{ u}^2$$

Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un máximo absoluto en el punto de abscisa $x = 1$, que su gráfica pasa por el punto $(1, 4)$ y que $\int_{-1}^3 f(x) dx = \frac{32}{3}$. Halla a , b y c .

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera y segunda derivada de la función.

$$f'(x) = 2ax + b ; f''(x) = 2a$$

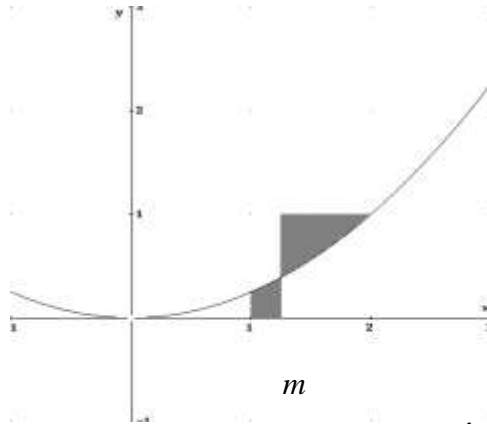
Vamos aplicando las condiciones del problema.

- Máximo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0$

- Pasa por $(1, 4) \Rightarrow f(1) = 4 \Rightarrow a + b + c = 4$

- $\int_{-1}^3 (ax^2 + bx + c) dx = \frac{32}{3} \Rightarrow \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_{-1}^3 = \frac{28a}{3} + 4b + 4c = \frac{32}{3}$

En la figura adjunta puedes ver representada en el intervalo $[0,2]$ la gráfica de la parábola de ecuación $y = \frac{x^2}{4}$. Halla el valor de m para el que las áreas de las superficies rayadas son iguales.



MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

$$\int_0^m \frac{x^2}{4} dx = \int_m^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx \Rightarrow \left[\frac{x^3}{12}\right]_0^m = \left[x - \frac{x^3}{12}\right]_m^2 \Rightarrow \frac{m^3}{12} = \frac{m^3}{12} - m + \frac{4}{3} \Rightarrow m = \frac{17}{12}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

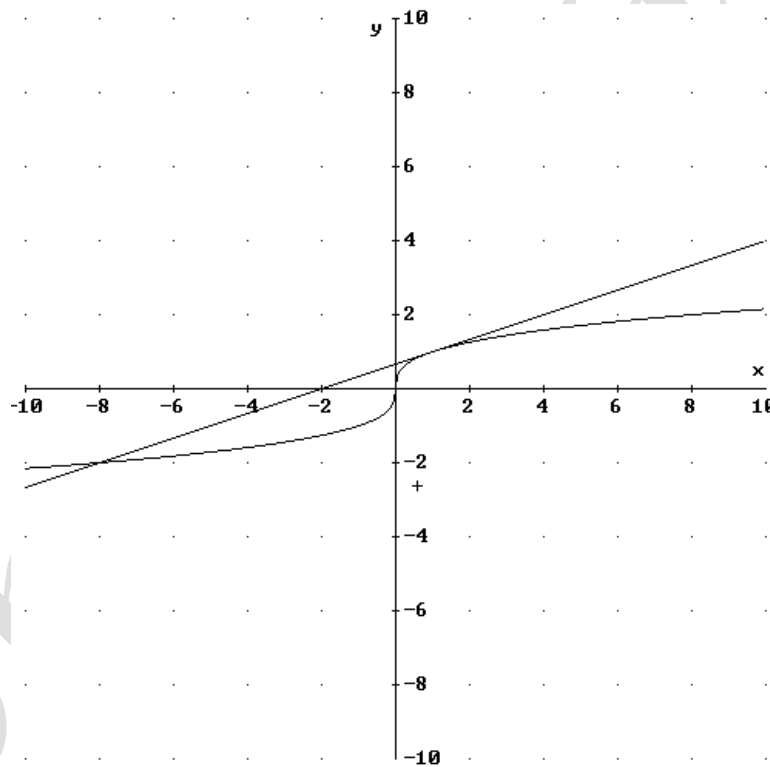
- a) Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
 b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta tangente obtenida.
 c) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

- a) La recta tangente pasa por el punto $P(1,1)$ y su pendiente vale $y'(1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$. Luego, la recta tangente es: $y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{x + 2}{3}$

b)



c)

$$A = \int_{-8}^1 \left(\frac{x+2}{3} - \sqrt[3]{x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{3} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right]_{-8}^1 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{64}{6} + \frac{16}{3} + 12 = \frac{27}{4} u^2$$

Determina el valor positivo de λ para el que el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = \lambda x$ es 1.

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = \lambda x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - \lambda x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = \lambda$$

$$A = \int_0^{\lambda} (\lambda x - x^2) dx = \left[\frac{\lambda x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\lambda} = \frac{\lambda^3}{6} = 1 \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{6}$$

Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x-1) \cdot \ln x$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$.

MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral, que es una integral por partes.

$$u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = (x-1) dx; \quad v = \frac{x^2}{2} - x$$

$$I = \int (x-1) \cdot \ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} - x\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \cdot \ln x - \frac{1}{4}x^2 + x + C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$.

$$F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \cdot \ln x - \frac{1}{4}x^2 + x + C \Rightarrow -\frac{3}{2} = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \ln 1 - \frac{1}{4} + 1 + C \Rightarrow C = -\frac{9}{4}$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \cdot \ln x - \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{9}{4}$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$

a) ¿En qué punto de la gráfica de f la recta tangente a ésta pasa por el origen de coordenadas? Halla la ecuación de dicha tangente.

b) Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la gráfica de f , la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

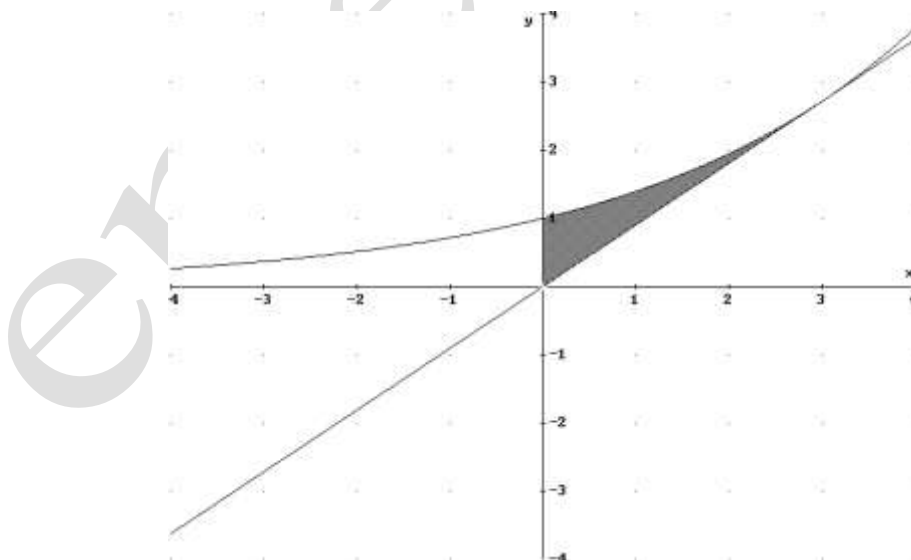
a) El punto será $P\left(a, e^{\frac{a}{3}}\right)$ y la pendiente valdrá: $y' = \frac{e^{\frac{x}{3}}}{3} \Rightarrow m = \frac{e^{\frac{a}{3}}}{3}$.

La ecuación de la recta tangente será: $y - e^{\frac{a}{3}} = \frac{e^{\frac{a}{3}}}{3}(x - a)$. Como queremos que pase por el origen de coordenadas, se debe cumplir que:

$$0 - e^{\frac{a}{3}} = \frac{e^{\frac{a}{3}}}{3}(0 - a) \Rightarrow -3e^{\frac{a}{3}} = -ae^{\frac{a}{3}} \Rightarrow a = 3$$

Luego, el punto será: $P(3, e)$ y la recta tangente: $y - e = \frac{e}{3}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{ex}{3}$.

b)



Por lo tanto, el área pedida será:

$$A = \int_0^3 \left(e^{\frac{x}{3}} - \frac{ex}{3} \right) dx = \left[3e^{\frac{x}{3}} - \frac{ex^2}{6} \right]_0^3 = \left(3e - \frac{9e}{6} \right) - (3) = \frac{3e}{2} - 3$$