

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones definidas mediante

$$f(x) = x^3 + 3x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x + 3$$

- a) Esboza las gráficas de  $f$  y de  $g$  calculando sus puntos de corte.  
 b) Calcula el área de cada uno de los dos recintos limitados entre las gráficas de  $f$  y  $g$ .
- MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

### R E S O L U C I Ó N

a) Para dibujar la función  $f(x) = x^3 + 3x^2$ , vamos a calcular sus extremos relativos y puntos de corte con los ejes.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = -2$$

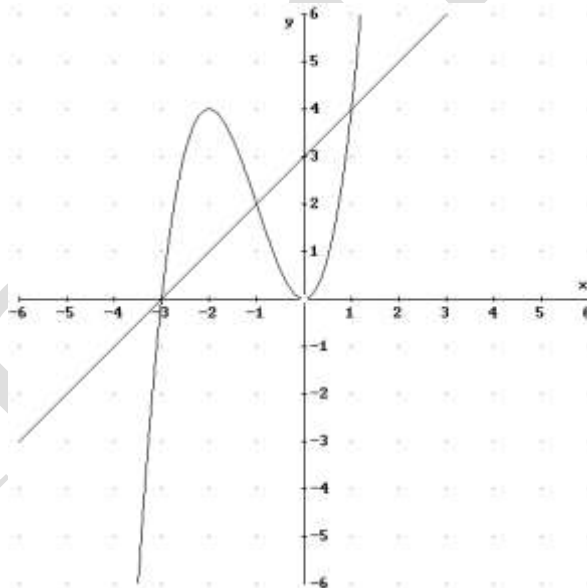
$$f''(x) = 6x + 6$$

$$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow \text{mínimo } (0, 0)$$

$$f''(-2) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Máximo } (-2, 4)$$

La función corta al eje X en  $(0, 0)$  y  $(-3, 0)$ .

Para dibujar la función  $g(x) = x + 3$ , basta con hacer una tabla de valores, ya que es una recta.



Vemos claramente en el dibujo que las funciones se cortan en los puntos:  $(-3, 0)$ ;  $(-1, 2)$  y  $(1, 4)$

b)

$$A_1 = \int_{-3}^{-1} [(x^3 + 3x^2) - (x + 3)] dx = \int_{-3}^{-1} (x^3 + 3x^2 - x - 3) dx = \left[ \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x \right]_{-3}^{-1} = 4u^2$$

$$A_2 = \int_{-1}^1 [(x + 3) - (x^3 + 3x^2)] dx = \int_{-1}^1 (-x^3 - 3x^2 + x + 3) dx = \left[ -\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^1 = 4u^2$$

Dada la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \text{Ln}(1+x^2)$ , halla la primitiva de  $f$  cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas (Ln denota la función logaritmo neperiano).  
**MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

$$\int \text{Ln}(1+x^2) dx = x \cdot \text{Ln}(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx = x \cdot \text{Ln}(1+x^2) - \int 2 dx + \int \frac{2}{1+x^2} dx =$$
$$= x \cdot \text{Ln}(1+x^2) - 2x + 2 \text{arctg } x + C$$

$$u = \text{Ln}(1+x^2); \quad du = \frac{2x}{1+x^2} dx$$
$$dv = dx; \quad v = x$$

De todas las primitivas de  $f(x)$

$$F(x) = x \cdot \text{Ln}(1+x^2) - 2x + 2 \text{arctg } x + C$$

nos piden la que pasa por el punto  $(0,0)$ , luego:

$$F(0) = 0 \cdot \text{Ln}(1+0^2) - 2 \cdot 0 + 2 \text{arctg } 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden es:  $x \cdot \text{Ln}(1+x^2) - 2x + 2 \text{arctg } x$

Considera las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

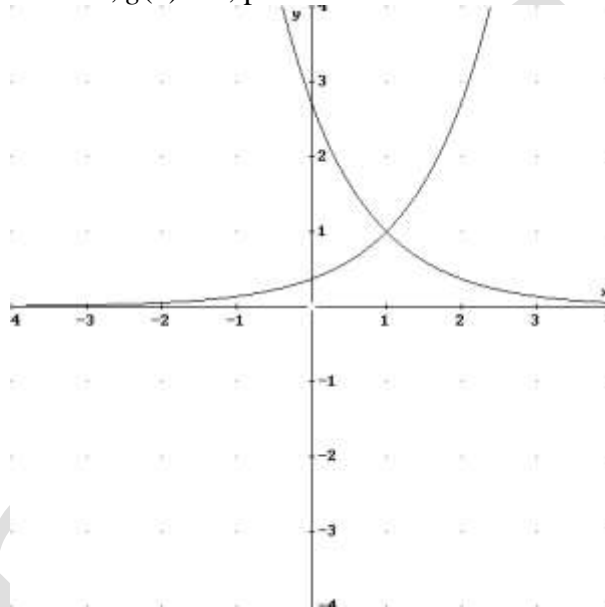
$$f(x) = e^{x-1} \quad \text{y} \quad g(x) = e^{1-x}$$

- a) Esboza las gráficas de  $f$  y de  $g$  y determina su punto de corte.  
 b) Calcula el área del recinto limitado por el eje OY y las gráficas de  $f$  y  $g$ .  
**MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 2.OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) La gráfica de  $f(x) = e^{x-1}$ , es exactamente igual que la de  $e^x$  pero desplazada una unidad a la derecha en abscisas OX (en negro).

Como  $g(x) = e^{1-x} = e \cdot e^{-x}$ , sabemos que la gráfica de  $e^{-x}$  es exactamente igual que la de  $e^x$  pero simétrica respecto al eje de ordenadas OY, y al estar multiplicada por  $e$ , está dilatada a lo largo de dicho eje OY. En concreto si  $x = 0$ ,  $g(0) = e$ , por tanto un esbozo de dichas gráficas es



Para encontrar el punto de corte igualamos las funciones  $e^{x-1} = e^{1-x} \Rightarrow x-1 = 1-x \Rightarrow x=1$ , con lo cual el punto de corte es  $(1, 1)$ .

$$b) A = \int_0^1 (e^{1-x} - e^{x-1}) dx = [-e^{1-x} - e^{x-1}]_0^1 = -1 - 1 + e + \frac{1}{e} = -2 + e + \frac{1}{e}$$

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x(x-3)^2$ .

a) Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$ .

b) Haz un esbozo de la gráfica de  $f$ .

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de  $f$  y el eje de abscisas.

**MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 2.OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función  $f(x) = x(x-3)^2 = x(x^2 - 6x + 9) = x^3 - 6x^2 + 9x$

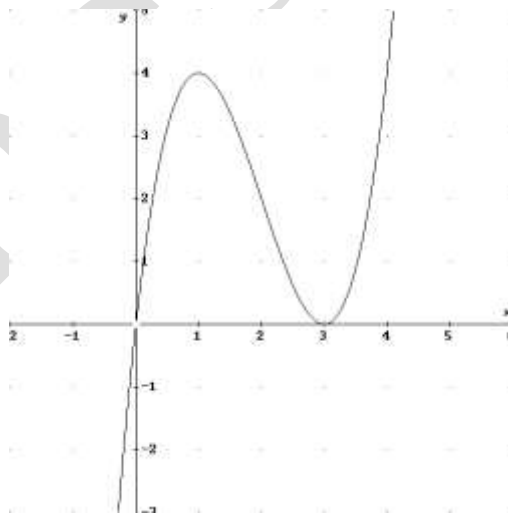
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = 3$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
Signo $y'$	+	-	+
Función	C	D	C

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 Máximo (1,4)    mínimo (3,0)

b) Para hacer un esbozo de la gráfica calculamos los cortes con los ejes.

Puntos de corte (0, 0) y (3, 0)



$$c) A = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x) dx = \left[ \frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{81}{4} - 54 + \frac{81}{2} = \frac{27}{4} u^2$$

$$\text{Sea } I = \int \frac{2}{2-e^x} dx.$$

a) Expresa  $I$  haciendo el cambio de variable  $t = e^x$ .

b) Calcula  $I$ .

**MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 2.OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right\} I = \int \frac{2}{2-e^x} dx = \int \frac{2}{2-t} \cdot \frac{dt}{t}$$

b)

$$I = \int \frac{2}{2-e^x} dx = \int \frac{2}{2-t} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{A}{2-t} dt + \int \frac{B}{t} dt = -\ln(2-t) + \ln t = -\ln(2-e^x) + \ln e^x + C = x - \ln(2-e^x) + C$$

$$\frac{2}{2-t} \cdot \frac{1}{t} = \frac{A}{2-t} + \frac{B}{t} = \frac{A \cdot t + B(2-t)}{(2-t) \cdot t} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \Rightarrow 2 = 2B \Rightarrow B=1 \\ t=2 \Rightarrow 2 = 2A \Rightarrow A=1 \end{cases}$$

Sea  $f : (-2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida mediante  $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x} & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ \frac{x^2 - \beta}{2} & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$

a) Determina  $\alpha$  y  $\beta$  sabiendo que  $f$  es derivable.

b) Calcula  $\int_{-2}^{-1} f(x) dx$ .

**MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### RESOLUCIÓN

a) Para que sea derivable, primero tiene que ser continua en  $x = -1$ , luego:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{-1} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - \beta}{2} = \frac{1 - \beta}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\alpha}{-1} = \frac{1 - \beta}{2} \Rightarrow 2\alpha = -1 + \beta \Rightarrow 2\alpha - \beta = -1$$

Estudiamos la derivabilidad de  $f(x)$  en  $x = -1$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{x^2} & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(-1^-) = -\alpha \\ f'(-1^+) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = 1$$

Sustituyendo en la ecuación anterior nos queda:  $2\alpha - \beta = -1 \Rightarrow 2 - \beta = -1 \Rightarrow \beta = 3$

b)

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{-2}^{-1} = -\ln 2$$

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \begin{cases} 1 + \alpha x & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Determina el valor de  $\alpha$  sabiendo que  $f$  es derivable.

b) Haz un esbozo de la gráfica de  $f$ .

c) Calcula  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .

**MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.**

### RESOLUCIÓN

a) Estudiamos la derivabilidad de  $f(x)$  en  $x=0$

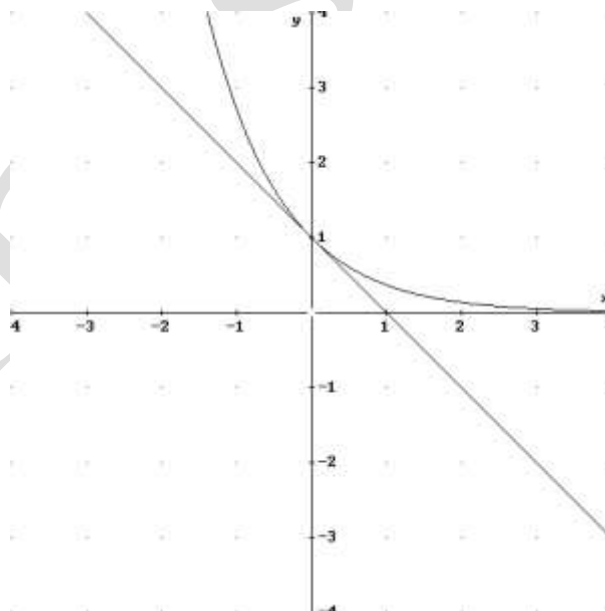
$$f'(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x < 0 \\ -e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = \alpha \\ f'(0^+) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = -1$$

b) Para hacer un esbozo de la gráfica tenemos en cuenta que  $1-x$  es una recta y con dos puntos nos basta para dibujarla, en concreto  $(0,1)$  y  $(-1,-2)$ .

La gráfica de  $e^{-x}$  es exactamente igual que la de la exponencial  $e^x$  pero simétrica respecto al eje de ordenadas OY.

Un esbozo sería:



c)

$$\int_{-1}^0 (1-x) dx + \int_0^1 e^{-x} dx = \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[ -e^{-x} \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{e}$$



Calcula

a)  $\int \frac{3x+4}{x^2+1} dx$

b)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx$

**MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\int \frac{3x+4}{x^2+1} dx = \int \frac{3x}{x^2+1} dx + \int \frac{4}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + 4 \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \ln|x^2+1| + 4 \operatorname{arctg} x + C$$

b) Calculamos primero la integral por partes

$$\int x \cdot \cos 2x dx = \frac{x \cdot \operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2x dx = \frac{x \cdot \operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{1}{4} \cos 2x$$

$$u = x; du = dx$$

$$dv = \cos 2x dx; v = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

Ahora, calculamos la integral que nos piden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \cos 2x dx = \left[ \frac{x \cdot \operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

Calcula  $\beta > 0$  para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

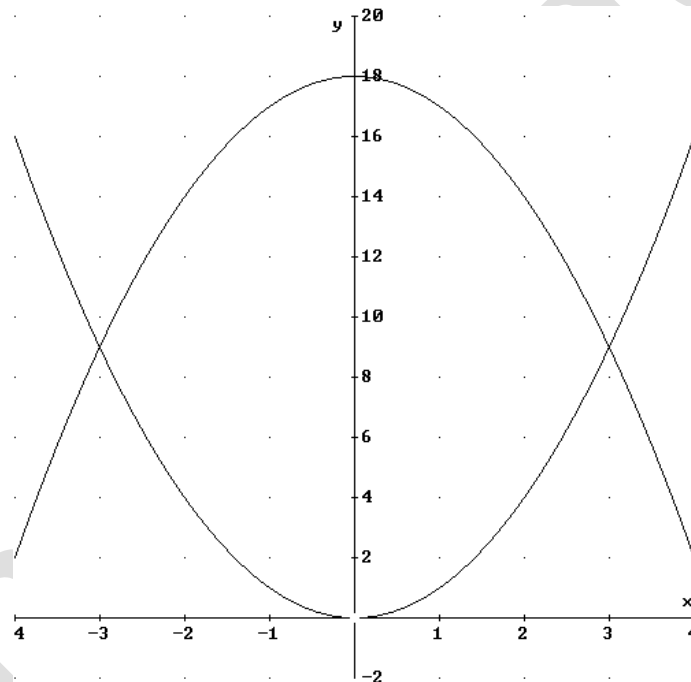
$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = -x^2 + 2\beta^2$$

sea 72 (unidades de área).

**MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

La gráfica de  $f(x) = x^2$  es una parábola que tiene su vértice en  $(0,0)$  y las ramas hacia arriba. Como  $\beta > 0$ , la gráfica de  $g(x) = -x^2 + 2\beta^2$  es igual que la de  $-x^2$  (como la de  $x^2$  pero simétrica respecto el ej OX) pero desplazada hacia arriba  $2\beta^2$  en OY. Aunque no lo piden las gráficas conjuntas son:



Para encontrar el punto de corte igualamos las funciones  $x^2 = -x^2 + 2\beta^2 \Rightarrow x = \beta$  ;  $x = -\beta$ .

$$72 = \int_{-\beta}^{\beta} (-x^2 + 2\beta^2 - x^2) dx = \left[ -\frac{2}{3}x^3 + 2\beta^2 x \right]_{-\beta}^{\beta} = -\frac{2}{3}\beta^3 + 2\beta^3 - \left( -\frac{2}{3}\beta^3 + 2\beta^3 \right) = \frac{8}{3}\beta^3 \Rightarrow \beta = 3$$

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x^2$ .

a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .

b) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de  $f$ , la recta tangente obtenida en el apartado anterior y el eje OX. Calcula su área.

**MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

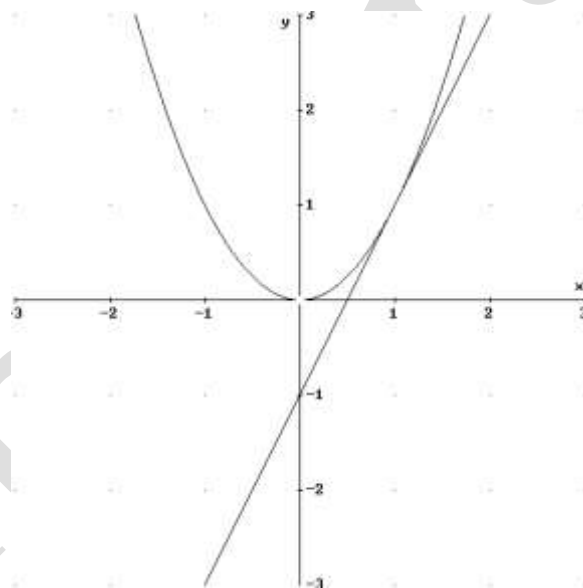
a) La ecuación de la recta tangente en  $x=1$  es:  $y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1)$

-  $f(1) = 1$

-  $f'(1) = 2$

Luego, la recta tangente es:  $y - 1 = 2 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$

b) Un esbozo de la gráfica de ambas funciones es:



Las funciones se cortan en el punto  $(1, 1)$

El área pedida es:

$$A = \int_0^1 x^2 dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1) dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \left[ x^2 - x \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{3} - 1 + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12} u^2$$

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x|x-2|$ .

- a) Estudia la derivabilidad de  $f$  en  $x = 2$ .  
 b) Esboza la gráfica de  $f$ .  
 c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de  $f$  y el eje de abscisas.  
**MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función.  $f(x) = x|x-2| = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Las funciones  $-x^2 + 2x$  y  $x^2 - 2x$  por ser polinómicas son continuas y derivables en  $\mathbb{R}$ . En el único punto donde puede haber problemas es en  $x = 2$ , que es el punto donde cambiamos de una a otra. Vamos a estudiar la continuidad y derivabilidad en  $x = 2$

Veamos la continuidad de  $f(x)$  en  $x = 2$ :

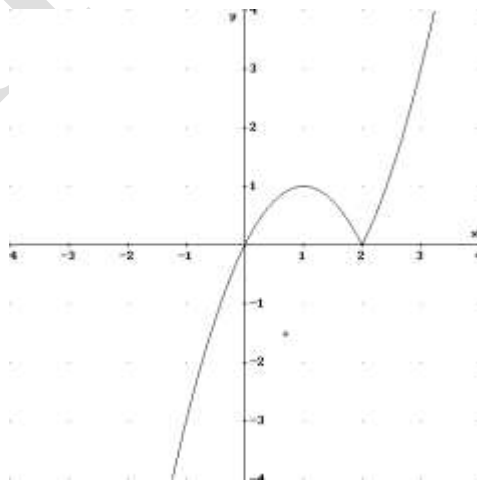
$$\begin{aligned}
 &1) f(2) = 0 \\
 &2) \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 2x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 2x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \\
 &3) f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función es continua en  $x = 2$

Estudiamos ya la derivabilidad de  $f(x)$ , en particular en  $x = 2$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{aligned} f'(2^-) &= -2 \\ f'(2^+) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(2^-) \neq f'(2^+) \Rightarrow \text{No derivable}$$

b)



c) El área pedida será:  $A = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = \left( -\frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{4}{3} u^2$

Sea  $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \text{Ln}(x+1)$ . ( $\text{Ln}$  denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 0$ .

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de  $f$ , la recta tangente obtenida en el apartado anterior y la recta  $x = 1$ .

**MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

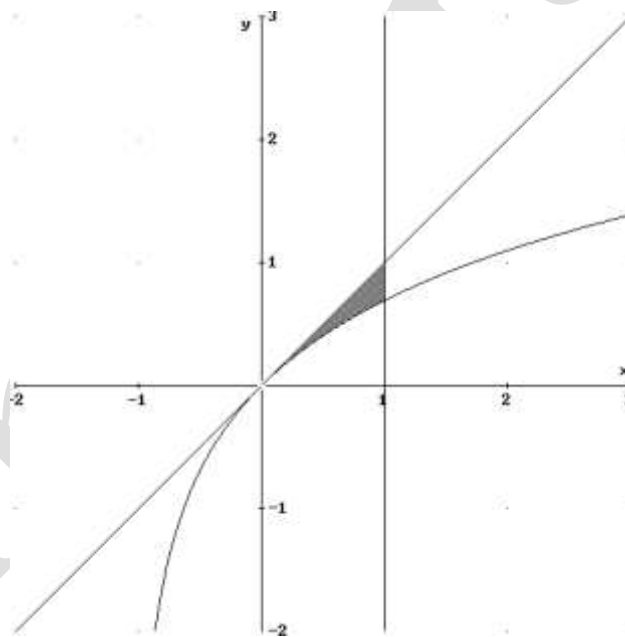
a) La recta tangente en  $x=0$  es  $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

$$f(0) = \text{Ln}1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = 1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos,  $y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x$

b) El área de la región pedida es:



$$A = \int_0^1 (x - \text{Ln}(x+1)) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - x\text{Ln}(x+1) + x - \text{Ln}(x+1) \right]_0^1 = \frac{3}{2} - 2\text{Ln}2$$

$$\int \text{Ln}(x+1) dx = x\text{Ln}(x+1) - \int \frac{x}{x+1} dx = x\text{Ln}(x+1) - \int 1 - \frac{1}{x+1} dx = x\text{Ln}(x+1) - x + \text{Ln}(x+1)$$

$$u = \text{Ln}(x+1); \quad du = \frac{1}{x+1} dx$$

$$dv = dx; \quad v = x$$