

**MATEMÁTICAS II**

**TEMA 5: INTEGRALES**

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Sea  $f$  una función continua en el intervalo  $[2, 3]$  y  $F$  una función primitiva de  $f$  tal que ,  $F(2) = 1$  y  $F(3) = 2$ . Calcula:

a)  $\int_2^3 f(x) dx$

b)  $\int_2^3 (5f(x) - 7) dx$

c)  $\int_2^3 (F(x))^2 \cdot f(x) dx$

**MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

### R E S O L U C I Ó N

a)  $\int_2^3 f(x) dx = [F(x)]_2^3 = F(3) - F(2) = 2 - 1 = 1$

b)  $\int_2^3 (5f(x) - 7) dx = 5 \int_2^3 f(x) dx - 7 \int_2^3 dx = 5 \cdot 1 - 7 \cdot [x]_2^3 = 5 - 7(3 - 2) = -2$

c)  $\int_2^3 (F(x))^2 \cdot f(x) dx = \left[ \frac{(F(x))^3}{3} \right]_2^3 = \frac{(F(3))^3}{3} - \frac{(F(2))^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Sea la función  $f$  definida por  $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$  para  $x \neq -1$  y  $x \neq 1$ .

a) Halla una primitiva de  $f$ .

b) Calcula el valor de  $k$  para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de  $f$  en el intervalo  $[2, k]$  sea  $\ln 2$ , donde  $\ln$  denota el logaritmo neperiano.

**MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Las raíces del denominador son:  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ;  $x = 1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular  $A$  y  $B$  sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x = 1 \Rightarrow 2 = 2A \Rightarrow A = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow 2 = -2B \Rightarrow B = -1$$

Con lo cual:  $\int \frac{2}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{-1}{x + 1} dx = \ln(x - 1) - \ln(x + 1) + C$

b)

$$A = \ln 2 = \int_2^k \frac{2}{x^2 - 1} dx = [\ln(x - 1) - \ln(x + 1)]_2^k = \ln \frac{k - 1}{k + 1} + \ln 3$$

Resolvemos la ecuación logarítmica:

$$\ln 2 = \ln \frac{k - 1}{k + 1} + \ln 3 \Rightarrow \ln \frac{2}{3} = \ln \frac{k - 1}{k + 1} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{k - 1}{k + 1} \Rightarrow 2k + 2 = 3k - 3 \Rightarrow k = 5$$

Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones definidas por:  $f(x) = \text{sen } x$  y  $g(x) = \text{cos } x$ , respectivamente.

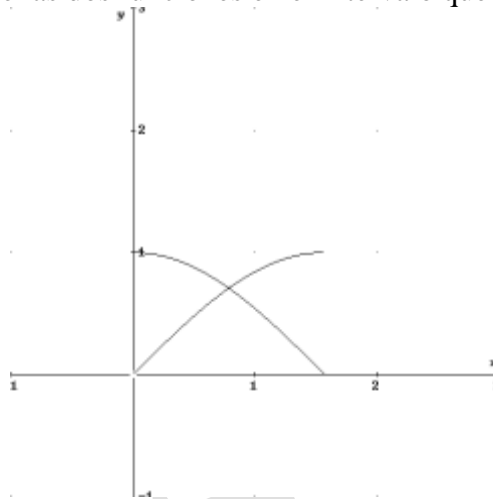
a) Realiza un esbozo de las gráficas de  $f$  y  $g$  en el intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

b) Calcula el área total de los recintos limitados por ambas gráficas y las rectas  $x = 0$  y  $x = \frac{\pi}{2}$

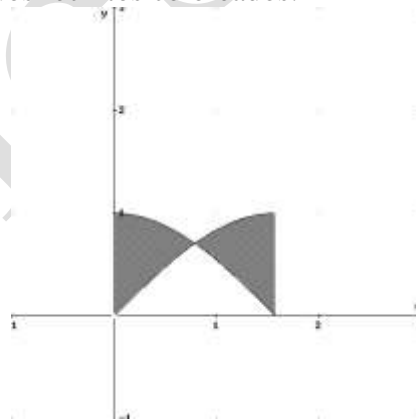
**MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Representamos gráficamente las dos funciones en el intervalo que nos dan:



b) El área que nos piden son los dos recintos coloreados:



Calculamos el área

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= A_1 + A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \text{sen } x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen } x - \cos x) dx = [\text{sen } x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \text{sen } x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \left[ \text{sen } \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right] - [\text{sen } 0 + \cos 0] + \left[ -\cos \frac{\pi}{2} - \text{sen } \frac{\pi}{2} \right] - \left[ -\cos \frac{\pi}{4} - \text{sen } \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \\
 &= 2\sqrt{2} - 2
 \end{aligned}$$

Sea  $f$  la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 \cos x$ . Determina la primitiva de  $f$  cuya gráfica pasa por el punto  $(\pi, 0)$ .

**MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral  $F(x) = \int x^2 \cos x dx$ , que es una integral por partes.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x^2 \cos x dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \cdot \operatorname{sen} x dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \left[ -x \cdot \cos x + \int \cos x dx \right] = \\ &= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cdot \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= x^2; \quad du = 2x dx \\ dv &= \cos x dx; \quad v = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= x; \quad du = dx \\ dv &= \operatorname{sen} x dx; \quad v = -\cos x \end{aligned}$$

$$F(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen} x + 2x \cdot \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$$

Como nos piden una primitiva que pase por  $(\pi, 0) \Rightarrow F(\pi) = 0$ , luego sustituyendo podemos calcular el valor de  $C$ .

$$0 = \pi^2 \cdot \operatorname{sen} \pi + 2\pi \cdot \cos \pi - 2 \operatorname{sen} \pi + C \Rightarrow 0 = -2\pi + C \Rightarrow C = 2\pi$$

Por lo tanto, la función primitiva que nos piden es:  $F(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen} x + 2x \cdot \cos x - 2 \operatorname{sen} x + 2\pi$

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por:  $f(x) = x^3 - 4x$

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .

b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de  $f$  y la recta  $y = -x - 2$ , determinando los puntos de corte de ambas gráficas.

c) Calcula el área del recinto anterior.

**MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

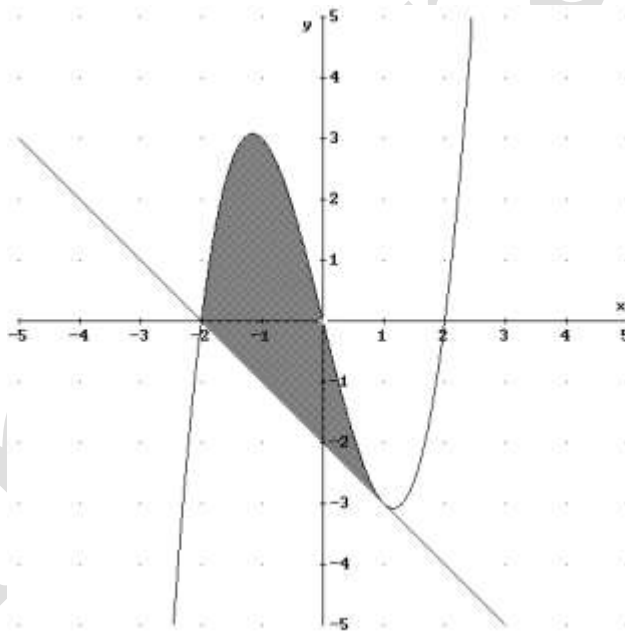
a) La recta tangente en  $x=1$  es  $y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1)$

$$f(1) = -3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \Rightarrow f'(1) = 3(1)^2 - 4 = -1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos,  $y + 3 = -1 \cdot (x-1) \Rightarrow y = -x - 2$

b) Hacemos un esbozo.



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$x^3 - 4x = -x - 2 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = -2$$

Luego, los puntos de corte son:  $(1, -3)$  y  $(-2, 0)$

c)

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 [(x^3 - 4x) - (-x - 2)] dx = \int_{-2}^1 [x^3 - 3x + 2] dx = \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \\ &= \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 \right) - \left( \frac{16}{4} - \frac{12}{2} - 4 \right) = \frac{27}{4} u^2 \end{aligned}$$

Sea  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones definidas por:  $f(x) = x^2 - 2x$  y  $g(x) = -x^2 + 4x$ , respectivamente.

a) Halla los puntos de corte de sus gráficas y realiza un esbozo del recinto que limitan.

b) Calcula el área de dicho recinto.

**MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

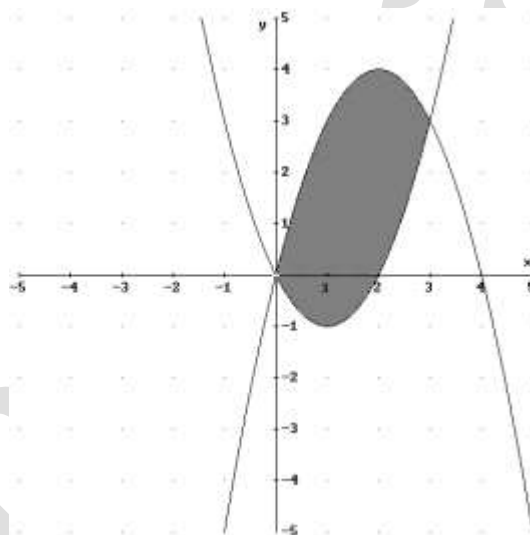
### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$x^2 - 2x = -x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 3$$

Luego, los puntos de corte son:  $(0,0)$  y  $(3,3)$

Hacemos un esbozo.



b)

$$A = \int_0^3 [(-x^2 + 4x) - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^3 [-2x^2 + 6x] dx = \left[ -\frac{2x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} \right]_0^3 = \left( -\frac{54}{3} + \frac{54}{2} \right) - (0) = 9u^2$$

Se considera el recinto del plano situado en el primer cuadrante limitado por las rectas  $y = 4x$ ,  $y = 8 - 4x$  y la curva  $y = 2x - x^2$ .

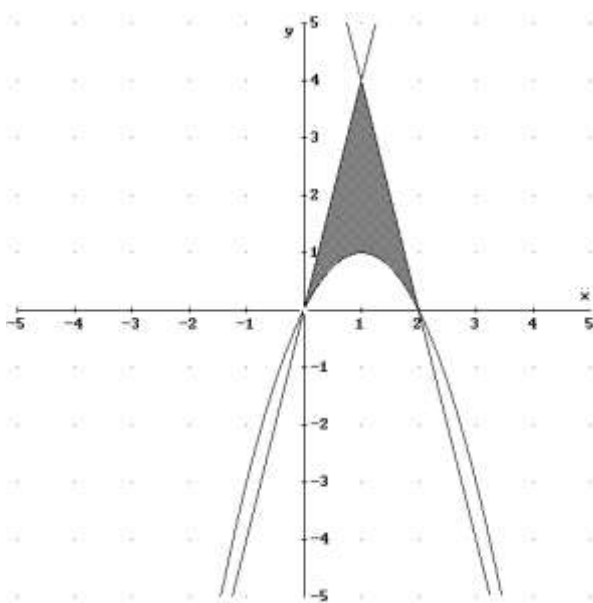
a) Realiza un esbozo de dicho recinto.

b) Calcula su área.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos un esbozo.



$$b) A = 2 \cdot \int_0^1 [(4x) - (2x - x^2)] dx = 2 \cdot \int_0^1 [2x + x^2] dx = 2 \cdot \left[ \frac{2x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \cdot \left( \frac{2}{2} + \frac{1}{3} \right) - (0) = \frac{8}{3} u^2$$



Calcula los valores de  $a$  y  $b$  sabiendo que la función  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax^2 + b \ln(x)$ , donde  $\ln$  denota la función logaritmo neperiano, tiene un extremo relativo en  $x = 1$  y que  $\int_1^4 f(x) dx = 27 - 8 \ln 4$ .

**MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

Como tiene un extremo relativo en  $x = 1$ , se cumple que  $f'(1) = 0$ , luego:

$$f'(x) = 2ax + \frac{b}{x} \Rightarrow f'(1) = 2a \cdot 1 + \frac{b}{1} = 0 \Rightarrow b = -2a$$

Calculamos la integral: Previamente calculamos por partes la integral de  $\ln(x)$

$$f(x) = \int \ln x dx = x \ln x - x$$

$$\int_1^4 ax^2 - 2a \ln(x) dx = \left[ \frac{ax^3}{3} - 2a(x \ln x - x) \right]_1^4 = \left( \frac{64a}{3} - 8a \ln 4 + 8a \right) - \left( \frac{a}{3} + 2a \right) = 27 - 8a \ln 4 \Rightarrow a = 1$$

Luego, los valores son:  $a = 1$  ;  $b = -2$

Sea la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = (1-x^2)e^{-x}$ . Determina la primitiva de  $f$  cuya gráfica pasa por el punto  $(-1, 0)$ .

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral, que es una integral por partes.

$$\begin{aligned} u &= 1-x^2; \quad du = -2x \, dx \\ dv &= e^{-x} \, dx; \quad v = -e^{-x} \end{aligned}$$

$$I = \int (1-x^2)e^{-x} \, dx = -e^{-x} \cdot (1-x^2) - 2 \int x \cdot e^{-x} \, dx$$

Volvemos a hacer la integral que nos queda por partes.

$$\begin{aligned} u &= x; \quad du = dx \\ dv &= e^{-x} \, dx; \quad v = -e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= -e^{-x} \cdot (1-x^2) - 2 \int x \cdot e^{-x} \, dx = -e^{-x} \cdot (1-x^2) - 2 \left[ -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \, dx \right] = \\ &= -e^{-x} \cdot (1-x^2) + 2xe^{-x} + 2e^{-x} + C = e^{-x} \cdot (x^2 + 2x + 1) + C \end{aligned}$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto  $(-1, 0)$ .

$$F(x) = e^{-x} \cdot (x^2 + 2x + 1) + C \Rightarrow F(-1) = 0 \Rightarrow F(-1) = -e^{-1}(1-2+1) + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Luego, la primitiva que nos piden es:  $F(x) = e^{-x} \cdot (x^2 + 2x + 1)$

Sean las funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = \frac{x^2}{4}$  y  $g(x) = 2\sqrt{x}$  respectivamente.

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de  $f$  y  $g$ . Realiza un esbozo del recinto que limitan.

b) Calcula el área de dicho recinto.

**MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

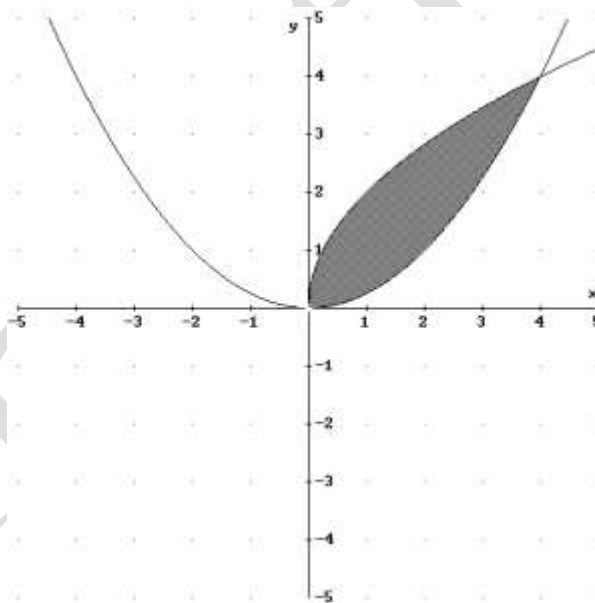
### RESOLUCIÓN

a) Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$\frac{x^2}{4} = 2\sqrt{x} \Rightarrow \frac{x^4}{16} = 4x \Rightarrow x^4 - 64x \Rightarrow x = 0 ; x = 4$$

Luego, los puntos de corte son:  $(0,0)$  y  $(4,4)$

Hacemos un esbozo.



$$b) A = \int_0^4 \left[ (2\sqrt{x}) - \left(\frac{x^2}{4}\right) \right] dx = \int_0^4 \left[ 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{4} \right] dx = \left[ \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{12} \right]_0^4 = \left( \frac{2\sqrt{64}}{\frac{3}{2}} - \frac{64}{12} \right) - (0) = \frac{16}{3} u^2$$

Sea  $I = \int_0^1 \frac{x}{1 + \sqrt{1-x}} dx$ .

a) Expresa la integral  $I$  aplicando el cambio de variable  $t = \sqrt{1-x}$ .

b) Calcula el valor de  $I$ .

**MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

### R E S O L U C I Ó N

a) Como el cambio es  $t = \sqrt{1-x}$ , vamos a calcular cuanto vale  $dx$ :

$$dt = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} dx = \frac{-1}{2t} dx \Rightarrow dx = -2t dt$$

$$t = \sqrt{1-x} \Rightarrow t^2 = 1-x \Rightarrow x = 1-t^2$$

Calculamos los nuevos límites de integración:

$$x=0 \Rightarrow t=1$$

$$x=1 \Rightarrow t=0$$

Sustituyendo, tenemos:

$$I = \int_1^0 \frac{(1-t^2)}{1+t} \cdot (-2t dt) = \int_1^0 \frac{(1+t)(1-t)}{1+t} \cdot (-2t dt) = \int_1^0 -2t(1-t) dt = \int_1^0 (-2t + 2t^2) dt$$

b) Calculamos el valor de  $I$

$$I = \int_1^0 (-2t + 2t^2) dt = \left[ -\frac{2t^2}{2} + \frac{2t^3}{3} \right]_1^0 = 0 - \left( -1 + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \frac{9-x^2}{4}$ .

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .

b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de  $f$ , la recta  $x + 2y = 5$  y el eje de abscisas. Calcula el área de dicho recinto.

**MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa  $x = 1$  es:  $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

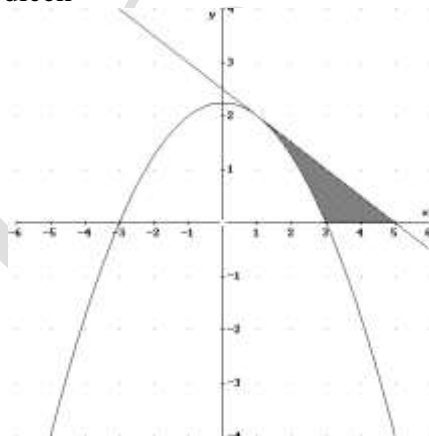
Calculamos:  $f(1) = \frac{9-1}{4} = 2$

$$f'(x) = \frac{-2x}{4} = \frac{-x}{2} \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{2}$$

Sustituyendo, tenemos:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow x + 2y - 5 = 0$$

b) Esbozamos el recinto que nos dicen



Calculamos el área del recinto

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 \left( \frac{5-x}{2} - \frac{9-x^2}{4} \right) dx + \int_3^5 \left( \frac{5-x}{2} \right) dx = \int_1^3 \left( \frac{x^2 - 2x + 1}{4} \right) dx + \int_3^5 \left( \frac{5-x}{2} \right) dx = \\ &= \left[ \frac{x^3 - x^2 + x}{4} \right]_1^3 + \left[ \frac{5x - \frac{x^2}{2}}{2} \right]_3^5 = \left( \frac{9-9+3}{4} \right) - \left( \frac{1-1+1}{4} \right) + \left( \frac{25-\frac{25}{2}}{2} \right) - \left( \frac{15-\frac{9}{2}}{2} \right) = \\ &= \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \end{aligned}$$