

**MATEMÁTICAS II**

**TEMA 5: INTEGRALES**

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Sea la función  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:  $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$ . Halla la primitiva de  $f$  cuya gráfica pasa por el punto  $(1,1)$ . (Sugerencia: efectúa el cambio de variable  $t = e^x$ )  
**MATEMÁTICAS II. 2019. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

$$e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx = \int \frac{1+t}{(1-t) \cdot t} dt$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1+t}{(1-t) \cdot t} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{t} = \frac{A \cdot t + B(1-t)}{(1-t) \cdot t}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular  $A$  y  $B$  sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$t=0 \Rightarrow 1 = B \Rightarrow B = 1$$

$$t=1 \Rightarrow 2 = A \Rightarrow A = 2$$

Con lo cual:

$$\int \frac{1+t}{(1-t) \cdot t} dt = \int \frac{2}{1-t} dt + \int \frac{1}{t} dt = -2 \ln |1-t| + \ln |t| + C = -2 \ln |1-e^x| + \ln |e^x| + C = -2 \ln |1-e^x| + x + C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto  $(1,1)$ .

$$1 = -2 \ln |1-e^1| + 1 + C \Rightarrow C = 2 \ln |1-e|$$

Luego, la primitiva que nos piden es:  $F(x) = -2 \ln |1-e^x| + x + 2 \ln |1-e|$

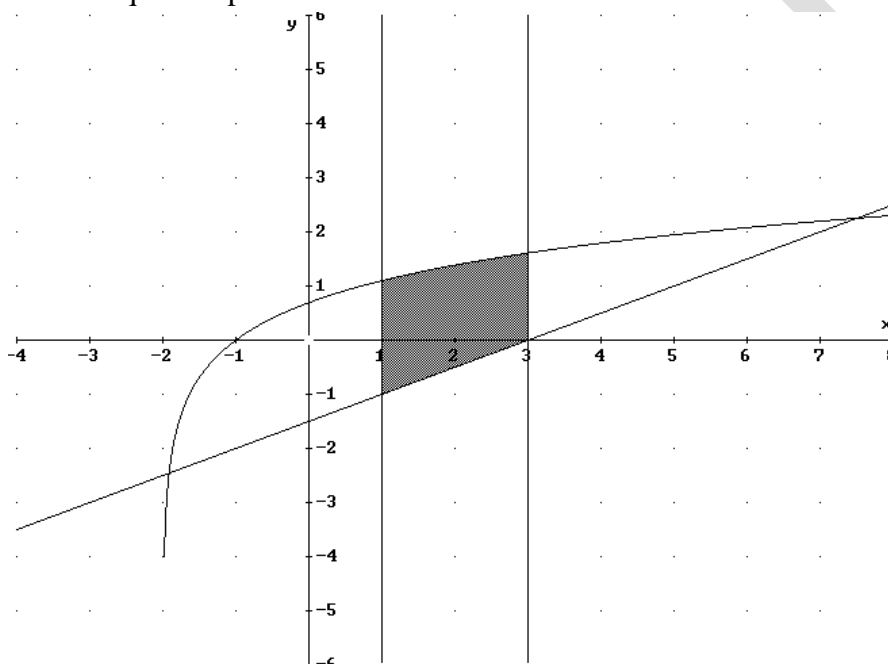
Considera las funciones  $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \ln(x+2)$  (ln denota la función logaritmo neperiano) y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$ .

- a) Esboza el recinto que determinan la gráfica de  $f$ , la gráfica de  $g$ , la recta  $x=1$  y la recta  $x=3$ . (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).  
b) Determina el área del recinto anterior.

**MATEMÁTICAS II. 2019. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### RESOLUCIÓN

- a) Dibujamos el recinto que nos piden



- b) Calculamos

$$\int \ln(x+2) dx = x \ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2} dx = x \ln(x+2) - \int \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx = x \ln(x+2) - x + 2 \ln(x+2) + C$$

$$u = \ln(x+2); \quad du = \frac{1}{x+2} dx$$

$$dv = dx; \quad v = x$$

El área que nos piden es:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 \left[ \ln(x+2) - \frac{1}{2}(x-3) \right] dx = \left[ x \ln|x+2| - x + 2 \ln|x+2| - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x \right]_1^3 = \\ &= \left( 3 \ln|5| - 3 + 2 \ln|5| - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} \right) - \left( \ln|3| - 1 + 2 \ln|3| - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \right) = 3,75 u^2 \end{aligned}$$

Calcula  $\int \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) dx$  (ln denota la función logaritmo neperiano).

**MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

### RESOLUCIÓN

Calculamos la integral, por partes:

$$\int \ln(1+x^2) dx = x \cdot \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx$$

$$u = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right); du = \frac{2x \cdot x - 1 \cdot (x^2+1)}{\frac{x^2}{x^2+1}} dx = \frac{x^2-1}{x \cdot (x^2+1)} dx$$

$$dv = dx; v = x$$

$$\int \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) dx = x \cdot \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - \int x \cdot \frac{x^2-1}{x \cdot (x^2+1)} dx = x \cdot \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - \int \frac{x^2-1}{(x^2+1)} dx$$

La integral que nos queda es una integral racional, hacemos la división y nos queda:

$$\begin{aligned} \int \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) dx &= x \cdot \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - \int \frac{x^2-1}{(x^2+1)} dx = x \cdot \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - \int 1 - \frac{2}{(x^2+1)} dx = \\ &= x \cdot \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - x + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C \end{aligned}$$

Sean las funciones  $f, g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = \text{sen } x$  y  $g(x) = \text{sen } 2x$

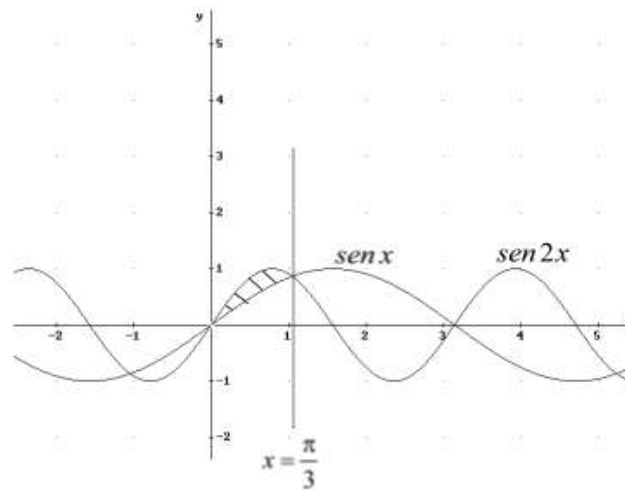
a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

b) Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas y las rectas  $x = 0$  y  $x = \frac{\pi}{3}$ .

**MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### RESOLUCIÓN

a)



Calculamos los puntos de corte en  $[0, \pi]$

$$\text{sen } x = \text{sen } 2x \Rightarrow \text{sen } x = 2 \text{sen } x \cdot \cos x \Rightarrow \text{sen } x(1 - 2 \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 1 - 2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

b) Calculamos el área que nos piden:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\text{sen } 2x - \text{sen } x) dx = \left[ -\frac{1}{2} \cos 2x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left( -\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} \right) - \left( -\frac{1}{2} \cos 0 + \cos 0 \right) = \\ &= \left( -\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} \right) \right) - \left( -\frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \right) = \frac{1}{4} u^2 \end{aligned}$$

Sea  $f$  la función definida por  $f(x) = \frac{x^4}{x^2-1}$  para  $x \neq 1, -1$ .

a) Halla todas las funciones primitivas de  $f$ .

b) Calcula la primitiva que pasa por  $(2,0)$ .

**MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

### R E S O L U C I Ó N

a) Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{x^4}{x^2-1} dx = \int (x^2+1) dx + \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{x^3}{3} + x + \int \frac{1}{x^2-1} dx$$

Calculamos las raíces del denominador:  $x^2-1=0 \Rightarrow x=1; x=-1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular  $A$  y  $B$  sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1 \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$x=-1 \Rightarrow 1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{x^4}{x^2-1} dx = \frac{x^3}{3} + x + \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{x^3}{3} + x + \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1} dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} dx = \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

b) Calculamos la primitiva que pasa por  $(2,0)$

$$F(2) = 0 \Rightarrow \frac{2^3}{3} + 2 + \frac{1}{2} \ln|2-1| - \frac{1}{2} \ln|2+1| + C = 0 \Rightarrow \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{2} \ln 3 + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{14}{3} + \frac{1}{2} \ln 3$$

Luego, la primitiva que nos piden es:  $F(x) = \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{14}{3} + \frac{1}{2} \ln 3$

Considera las funciones  $f, g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = \cos(x)$  y  $g(x) = \text{sen}(x)$ .

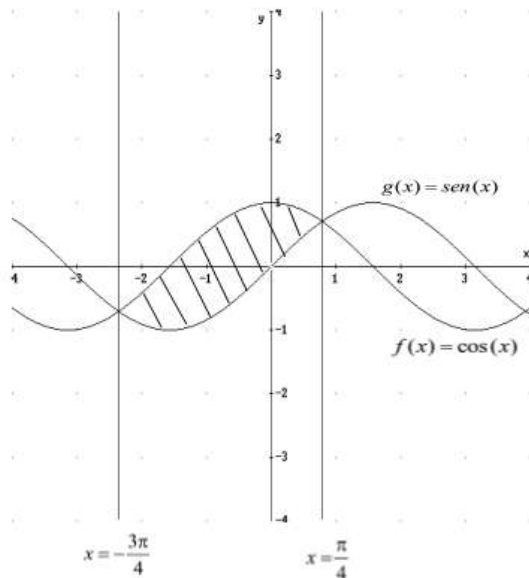
a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

b) Calcula el área del recinto delimitado por las gráficas de  $f$  y de  $g$  en el intervalo  $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ .

**MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

a) Representamos gráficamente las dos funciones:



Calculamos los puntos de corte. Resolvemos la ecuación:

$$\cos(x) = \text{sen}(x) \Rightarrow \frac{\cos(x)}{\cos(x)} = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} \Rightarrow 1 = \text{tg}(x) \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Las soluciones que nos interesan son las que están en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , luego son:  $x = -\frac{3\pi}{4}$  y

$$x = \frac{\pi}{4}$$

b) Calculamos el área que nos piden

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \text{sen } x) dx = [\text{sen } x + \cos x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \left[ \text{sen } \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right] - \left[ \text{sen } \frac{-3\pi}{4} + \cos \frac{-3\pi}{4} \right] = \\ &= \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Dado un número real  $a > 0$ , considera la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = x^2 - ax$ , y la recta  $y = 2ax$ . Determina  $a$  sabiendo que el área del recinto limitado por la gráfica de  $f$  y la recta anterior es 36.

**MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2ax \\ y = x^2 - ax \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - ax = 2ax \Rightarrow x^2 - 3ax = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 3a .$$

Vemos que función va por encima y cual por debajo.

$$x = a \Rightarrow \begin{cases} y = 2ax = 2a^2 \\ y = x^2 - ax = a^2 - a^2 = 0 \end{cases}$$

Va por encima la recta y por debajo la parábola.

Luego:

$$36 = \int_0^{3a} (2ax - x^2 + ax) dx = \int_0^{3a} (3ax - x^2) dx = \left[ \frac{3ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{3a} = \left[ \frac{27a^3}{2} - \frac{27a^3}{3} \right] = \frac{27a^3}{6} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 27a^3 = 216 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$



Sea  $f : \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y sea  $F$  la primitiva de  $f$  que cumple  $F(0) = \frac{\pi}{3}$  y

$F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \pi$ . Calcula:

a)  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (3f(x) - \cos(x)) dx$

b)  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \text{sen}(F(x)) f(x) dx$

**MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### RESOLUCIÓN

a)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (3f(x) - \cos(x)) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 3f(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(x) dx = 3[F(x)]_0^{\frac{\pi}{6}} - [\text{sen}(x)]_0^{\frac{\pi}{6}} = \\ &= 3\left[F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0)\right] - \left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) - \text{sen}(0)\right] = 3\left[\pi - \frac{\pi}{3}\right] - \left[\frac{1}{2} - 0\right] = 2\pi - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \text{sen}(F(x)) f(x) dx &= [-\cos(F(x))]_0^{\frac{\pi}{6}} = \left[-\cos\left(F\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - (-\cos(F(0)))\right] = \left[-\cos(\pi) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right] = \\ &= -(-1) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 8 & \text{si } x \leq 4 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

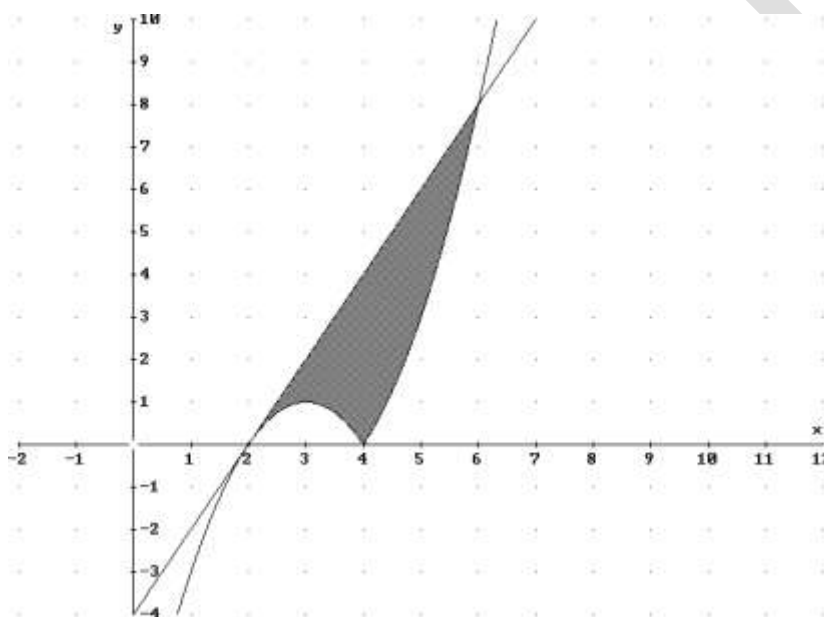
a) Calcula los puntos de corte entre la gráfica de  $f$  y la recta  $y = 2x - 4$ . Esboza el recinto que delimitan la gráfica de  $f$  y la recta.

b) Calcula el área del recinto anterior.

**MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

### RESOLUCIÓN

a)



Calculamos los puntos de corte.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x - 4 \\ y = -x^2 + 6x - 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 4 = -x^2 + 6x - 8 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x - 4 \\ y = x^2 - 6x + 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 4 = x^2 - 6x + 8 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2 ; x = 6 \Rightarrow (6, 8)$$

El valor  $x=2$  no sirve ya que está fuera de su dominio. Luego los puntos de corte son:  $(2, 0)$  y  $(6, 8)$

b) Calculamos el área que nos piden.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_2^4 [(2x-4) - (-x^2+6x-8)] dx + \int_4^6 [(2x-4) - (x^2-6x+8)] dx = \\ &= \int_2^4 (x^2 - 4x + 4) dx + \int_4^6 (-x^2 + 8x - 12) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_2^4 + \left[ -\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 12x \right]_4^6 = \\ &= \left[ \left( \frac{64}{3} - 32 + 16 \right) - \left( \frac{8}{3} - 8 + 8 \right) \right] + \left[ \left( -\frac{216}{3} + 144 - 72 \right) - \left( -\frac{64}{3} + 64 - 48 \right) \right] = 8 u^2 \end{aligned}$$

Considera la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = -4x^2 + a$ , siendo  $a > 0$  un número real. Esboza el recinto limitado por la gráfica de  $f$  y la recta  $y = 0$ . Calcula  $a$  sabiendo que el área del recinto es 18.

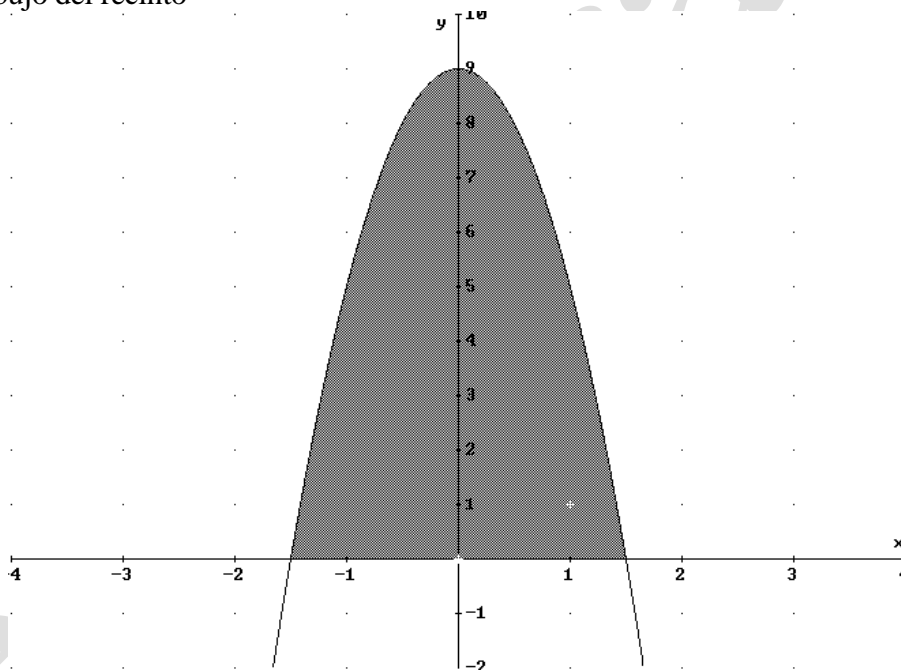
**MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### RESOLUCIÓN

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = -4x^2 + a \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -4x^2 + a = 0 \Rightarrow 4x^2 = a \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{a}}{2}$$

Hacemos el dibujo del recinto



Calculamos el área que nos piden

$$A = \int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}} (-4x^2 + a) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} (-4x^2 + a) dx = 2 \left[ -\frac{4x^3}{3} + ax \right]_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} = 2 \cdot \left[ -\frac{4 \left( \frac{\sqrt{a}}{2} \right)^3}{3} + a \cdot \left( \frac{\sqrt{a}}{2} \right) \right] = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \cdot \frac{4 \cdot \sqrt{a^3}}{8} + 2 \cdot \frac{\sqrt{a^3}}{2} = 18 \Rightarrow -\frac{\sqrt{a^3}}{3} + \sqrt{a^3} = 18 \Rightarrow \frac{2\sqrt{a^3}}{3} = 18 \Rightarrow \sqrt{a^3} = 27 \Rightarrow a = 9$$

Determina la función  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple

$$f'(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de  $f$  pasa por el punto  $(1, 0)$ .

**MATEMÁTICAS II. 2019. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.**

### RESOLUCIÓN

Calculamos la integral  $f(x) = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ , que es una integral por partes.

$$u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} dx; \quad v = 2\sqrt{x}$$

$$f(x) = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2 \cdot \sqrt{x} \ln x - \int \frac{2 \cdot \sqrt{x}}{x} dx = 2 \cdot \sqrt{x} \ln x - \int 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \cdot \sqrt{x} \ln x - 4 \cdot \sqrt{x} + C$$

Calculamos la constante:

$$0 = 2 \cdot 1 \cdot \ln(1) - 4 + C \Rightarrow C = 4$$

Por lo tanto, la función que nos piden es:

$$f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} \ln x - 4 \cdot \sqrt{x} + 4$$

Sea la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:  $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ .

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de  $f$  con los ejes coordenados y los extremos relativos de  $f$  (abscisas en los que se obtienen y los valores que se alcanzan).

b) Determina  $a > 0$  de manera que sea  $\frac{1}{4}$  el área del recinto determinado por la gráfica de  $f$  en el intervalo  $[0, a]$  y el eje de abscisas.

**MATEMÁTICAS II. 2019. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte

Corte con el eje X:  $y = 0 \Rightarrow x \cdot e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

Corte con el eje Y:  $x = 0 \Rightarrow y = 0$

Luego, la función corta en el punto  $(0, 0)$

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2} \cdot x = e^{-x^2} (1 - 2x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$	$\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$	$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$
Signo $y'$	-	+	-
Función	D	C	D

La función es creciente en  $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$  y decreciente en  $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$

Tiene un mínimo en  $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$  y un máximo en  $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$

b) Calculamos el área

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} = \int_0^a x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^a -2x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \left[ e^{-x^2} \right]_0^a \Rightarrow \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \left[ e^{-a^2} - 1 \right] \Rightarrow \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} e^{-a^2} + \frac{1}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} e^{-a^2} \Rightarrow -\frac{1}{4} = -\frac{1}{2} e^{-a^2} \Rightarrow e^{-a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln e^{-a^2} = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow -a^2 = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow -a^2 = \ln 1 - \ln 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -a^2 = -\ln 2 \Rightarrow a = \sqrt{\ln 2} = 0,8325 \end{aligned}$$