EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio B3
- Junio, Ejercicio B4
- Reserva 1, Ejercicio B3
- Reserva 1, Ejercicio B4
- Reserva 2, Ejercicio B3
- Reserva 2, Ejercicio B4
- Reserva 3, Ejercicio B3
- Reserva 3, Ejercicio B4
- Reserva 4, Ejercicio B3
- Reserva 4, Ejercicio B4
- Septiembre, Ejercicio B3
- Septiembre, Ejercicio B4

Se considera la función $f(x)=ax^3+bx+4$, con a y b números reales.
a) (1 Punto) Determine los valores de a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto $(2,36)$.
b) (0’75 puntos) Para $a=4$ y $b=-3$, estudie la monotonía de f y determine sus extremos relativos.
c) (0’75 Puntos) Para $a=4$ y $b=-3$, calcule la función $F(x)$ que verifica $F'(x)=f(x)$ y $F(2)=10$.
SOCIALES II. 2020. JUNIO. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función: $f'(x)=3ax^2+b$

Extremo relativo en $(2,36)\Rightarrow\begin{cases} f(2)=36\Rightarrow 8a+2b+4=36 \\ f'(2)=0\Rightarrow 12a+b=0\end{cases}$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $a=-2$; $b=24$

b) Calculamos la derivada de la función $f(x)=4x^3-3x+4$ y la igualamos a cero.

$$f'(x)=12x^2-3=0\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
Signo $f'(x)$	+	−	+
Función	C	D	C

La función es creciente en el intervalo: $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ y decreciente en el intervalo: $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Tiene un máximo relativo en el punto $\left(-\frac{1}{2},5\right)$ y un mínimo relativo en $\left(\frac{1}{2},3\right)$.

c) Calculamos la integral

$$F(x)=\int(4x^3-3x+4)\,dx=4\frac{x^4}{4}-3\frac{x^2}{2}+4x+C=x^4-\frac{3x^2}{2}+4x+C$$

Como sabemos que $F(2)=10$, entonces:

$$F(2)=10\Rightarrow 16-6+8+C=10\Rightarrow C=-8$$

Luego, la función es: $F(x)=x^4-\frac{3x^2}{2}+4x-8$

a) (1’2 puntos) Calcule la derivada de las siguientes funciones

$$f(x)=(-5+x^2)^2\cdot e^{3x} \qquad g(x)=\frac{\ln(x^3-5x)}{1-x^2}$$

b) (1’3 puntos) Calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $h(x)=-x^2+2x+3$ y el eje de abscisas

SOCIALES II. 2020. JUNIO. EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

a)

$$f'(x)=2\cdot(-5+x^2)\cdot 2x\cdot e^{3x}+3\cdot e^{3x}\cdot(-5+x^2)^2=e^{3x}\cdot(-5+x^2)\left[3x^2+4x-15\right]$$

$$g'(x)=\frac{\frac{3x^2-5}{x^3-5x}\cdot(1-x^2)-(-2x)\cdot\ln(x^3-5x)}{\left(1-x^2\right)^2}$$

b) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$\left.\begin{array}{l} h(x)=-x^2+2x+3 \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow -x^2+2x+3=0\Rightarrow x=-1\,;\; x=3$$

Tenemos que ver cuál de las dos funciones va por encima y cuál va por debajo. Para ello sustituimos un valor comprendido entre -1 y 3, y vemos cuál tiene mayor valor.

Para $x=0\Rightarrow h(0)=3$

Para $x=0\Rightarrow y=0$

Por lo tanto, la función que va por encima es $h(x)=-x^2+2x+3$. Luego el área vendrá dada por:

$$A=\int_{-1}^{3}\left[(-x^2+2x+3)-(0)\right]dx=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{3}=$$

$$=\left(-\frac{27}{3}+9+9\right)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=\frac{32}{3}\ u^2$$

a) (1'2 puntos) Se considera la función $f(x)=ax^2+bx+3$. Calcule los valores *a* y *b*, sabiendo que la gráfica de *f* pasa por el punto $(2,3)$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en dicho punto es $m=-2$.

b) (1'3 puntos) Represente gráficamente la función $g(x)=-x^2+6x-5$ y calcule el área comprendida entre la gráfica de la función *g*, el eje de abscisas y las rectas $x=2$ y $x=4$.

SOCIALES II. 2020 RESERVA 1. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función: $f'(x)=2ax+b$

- Pasa por $(2,3) \Rightarrow f(2)=3 \Rightarrow 4a+2b+3=3 \Rightarrow 4a+2b=0$

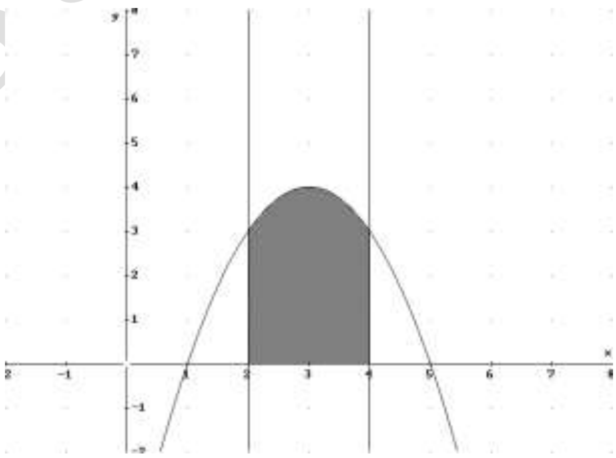
- Tangente en ese punto pendiente $m=-2 \Rightarrow f'(2)=-2 \Rightarrow 4a+b=-2$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 4a+2b=0 \\ 4a+b=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-1\ ;\ b=2$$

b) Representamos la parábola

x	$y=-x^2+6x-5$
Vértice $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-6}{-2}=3$	4
2	3
4	3
1	0
5	0



Calculamos el área

$$A=\int_2^4(-x^2+6x-5)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}-5x\right]_2^4=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2-5x\right]_2^4=$$

$$=\left[-\frac{4^3}{3}+3\cdot4^2-5\cdot4\right]-\left[-\frac{2^3}{3}+3\cdot2^2-5\cdot2\right]=-\frac{64}{3}+48-20+\frac{8}{3}-12+10=\frac{22}{3}\ u^2$$

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{1}{1-x} & si \quad x>0 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de *f* en $x=0$.
b) (1 punto) Estudie la monotonía y curvatura de *f* en su dominio.
c) (0'5 puntos) Calcule las ecuaciones de las asíntotas de *f*.
SOCIALES II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

a) La función $\dfrac{1}{1-x}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$. La función x^2+x+1 al ser polinómica es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y la derivabilidad en $x=0$.

Estudiamos la continuidad en $x=0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+x+1\right)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1 \Rightarrow \text{Continua en } x=0$$

Vamos a estudiar la derivabilidad en $x=0$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & si \quad x<0 \\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=1 \\ f'(0^+)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+) \Rightarrow \text{Si es derivable en } x=0$$

Por lo tanto, la función es continua derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=2x+1=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=0 \Rightarrow No.$$

	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$
Función	D	C	C	C

La función es decreciente en $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$. Tiene un mínimo en $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x)=2=0\Rightarrow No$

$$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}=0\Rightarrow No.$$

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f''(x)$	+	+	–
Función	Cx	Cx	Cn

La función es convexa en el intervalo $(-\infty,0)\cup(0,1)$ y cóncava en el intervalo $(1,+\infty)$. No tiene punto de inflexión.

c) La función polinómica x^2+x+1 no tiene asíntotas. Calculamos las asíntotas de la función $f(x)=\frac{1}{1-x}$ para $x>0$

Asíntota vertical $x=1$, ya que $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{1-x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{1-x}=-\infty\end{cases}$

Asíntota horizontal $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{-\infty}=0\Rightarrow y=0$

Asíntota oblicua: No tiene

a) (1'2 puntos) Calcule la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x)=\ln(3x^2-3)+\frac{1-2x}{x+2} \qquad g(x)=2e^{x^3}+x^2(3x+4)^3$$

b) (1'3 puntos) Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes a las gráficas de las funciones $h(x)=x^2+1$ y $p(x)=\frac{x-1}{x+1}$, en el punto de abscisa $x=1$. ¿En qué punto se cortan ambas rectas?

SOCIALES II. 2020. RESERVA 2. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a)

$$f'(x)=\frac{6x}{\left(3x^2-3\right)}+\frac{-2\cdot(x+2)-1\cdot(1-2x)}{(x+2)^2}=\frac{6x}{\left(3x^2-3\right)}+\frac{-5}{(x+2)^2}=\frac{2x}{x^2-1}+\frac{-5}{(x+2)^2}$$

$$g'(x)=6x^2\cdot e^{x^3}+2x\cdot(3x+4)^3+x^2\cdot 3\cdot(3x+4)^2\cdot 3=6x^2\cdot e^{x^3}+(3x+4)^2\cdot(15x^2+8x)$$

b) La recta tangente en $x=1$ es $y-h(1)=h'(1)\cdot(x-1)$

- $h(1)=2$
- $h'(x)=2x \Rightarrow h'(1)=2$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-2=2\cdot(x-1)\Rightarrow y=2x$

La recta tangente en $x=1$ es $y-p(1)=p'(1)\cdot(x-1)$

- $p(1)=0$
- $p'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}\Rightarrow p'(1)=\frac{1}{2}$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-=\frac{1}{2}\cdot(x-1)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

Resolvemos el sistema para calcular el punto de corte

$$\left.\begin{array}{l} y=2x \\ y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax+\dfrac{1}{2} & si \quad x\le -1 \\ \dfrac{x+1}{x+3} & si \quad -1<x\le 1 \\ x^2-bx & si \quad x>1 \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Halle *a* y *b* para que la función sea continua en todo su dominio. Para esos valores de *a* y *b*, ¿es *f* derivable en $x=-1$? ¿Y en $x=1$?

b) (0'5 puntos) Para $a=-1$ y $b=4$, estudie la monotonía de la función *f*.

c) (0'5 puntos) Para $a=-1$ y $b=4$, calcule $\int_1^2 f(x)\,dx$

SOCIALES II. 2020. RESERVA 2. EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

a) Por ser continua en $x=-1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-}\left(ax+\dfrac{1}{2}\right)=-a+\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -a+\dfrac{1}{2}=0 \Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$

Por ser continua en $x=1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)=\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-bx\right)=1-b \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{1}{2}=1-b \Rightarrow b=\dfrac{1}{2}$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & si \quad x<-1 \\ \dfrac{2}{(x+3)^2} & si \quad -1<x<1 \\ 2x-\dfrac{1}{2} & si \quad x>1 \end{cases}$

En $x=-1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(-1^-)=\dfrac{1}{2} \\ f'(-1^+)=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(-1^-)=f'(-1^+) \Rightarrow$ Derivable:

En $x=1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\dfrac{1}{8} \\ f'(1^+)=\dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)\neq f'(1^+) \Rightarrow$ No derivable

b) Calculamos la función derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x<-1 \\ \dfrac{2}{(x+3)^2} & si \quad -1<x<1 \\ 2x-4 & si \quad x>1 \end{cases}$

Igualamos la derivada a cero: $2x-4=0 \Rightarrow x=2$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Función	D	C	D	C

La función es creciente en $(-1,1)\cup(2,+\infty)$. Decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,2)$

Tiene un mínimo en $(2,-4)$

c) Calculamos la integral que nos piden

$$\int_1^2 (x^2-4x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_1^2=\left(\frac{8}{3}-8\right)-\left(\frac{1}{3}-2\right)=-\frac{11}{3}$$

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+2 & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{x+b}{x-1} & si \quad x>0 \end{cases}$

a) (1'2 puntos) Halle *a* y *b* para que *f* sea continua y derivable en $x=0$**.**
b) (0'7 puntos) Para $a=1$ **y** $b=-2$**, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa** $x=0$**.**
c) (0'6 puntos) Para $a=1$ **y** $b=1$**, halle, si existen, las ecuaciones de las asíntotas de *f*.**
SOCIALES II. 2020. RESERVA 3. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) Como es continua en $x=0$, se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+ax+2)=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x+b}{x-1}\right)=-b \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow -b=2\Rightarrow b=-2$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2x+a & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{-1-b}{(x-1)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$

Como la función es derivable en $x=0$, $\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=a \\ f'(0^+)=\dfrac{-1+2}{1}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+)\Rightarrow a=1$

b) Calculamos la tangente a la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x+2 & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{x-2}{x-1} & si \quad x>0 \end{cases}$ en $x=0$.

$f(0)=2$
$f'(0)=1$

Luego: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Rightarrow y-2=1\cdot(x-0)\Rightarrow y=x+2$

c) Calculamos las asíntotas de la función: $f(x)=\begin{cases} x^2+x+2 & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{x+1}{x-1} & si \quad x>0 \end{cases}$

Para $x\le 0$, la función $f(x)=x^2+x+2$, no tiene asíntotas ya que es una función polinómica.

Para $x>0$, calculamos las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

Asíntota vertical $x=1$, ya que: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x-1}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=+\infty \end{cases}$

Asíntota horizontal $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{\infty}{\infty}=1\Rightarrow y=1$

Asíntota oblicua: no tiene

El número de bacterias en un determinado cultivo viene dado por la función $B(t)$, donde t representa el tiempo en horas, con $0 \le t \le 7$. La variación instantánea en la población de bacterias en el cultivo viene dada por la derivada de la función *B*, cuya expresión es $B'(t) = 50000 \cdot e^{2t}$.

a) (0'75 puntos) ¿Existe algún instante *t* en el que el número de bacterias en el cultivo comience a decrecer?

b) (1'5 puntos) Obtenga la expresión de la función $B(t)$, sabiendo que en el instante $t = 0$ el número de bacterias en el cultivo era de 40000.

c) (0.25 puntos) ¿Cuál es el número de bacterias en el cultivo a la hora y media?

SOCIALES II. 2020. RESERVA 3. EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

a) La función $B(t)$ es creciente en el intervalo $(0,7)$, ya que su derivada es positiva en dicho intervalo, luego, no hay ningún instante en el que el número de bacterias en el cultivo comience a decrecer.

b) Calculamos la integral

$$B(t) = \int B'(t) \cdot dt = \int 50000 e^{2t}\, dt = 50000 \cdot \frac{1}{2} \int 2 e^{2t}\, dt = 25000 e^{2t} + C$$

Calculamos el valor de *C*, sabiendo que $B(0) = 40000$

$$B(0) = 40000 \Rightarrow 40000 = 25000 e^{0} + C \Rightarrow C = 15000$$

Luego, la función es: $B(t) = 25000 e^{2t} + 15000$

c) $B(1'5) = 25000 e^{2 \cdot 1'5} + 15000 = 25000 e^{3} + 15000 = 517.138$ bacterias

De una función *f* sabemos que su gráfica pasa por el punto $(1,3)$ y que su derivada es $f'(x)=2x-6$.
a) (0'75 puntos) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.
b) (1 punto) Estudie la monotonía y la existencia de extremos de la función *f*.
c) (0'75 puntos) Determine la función *f* y represéntela gráficamente.
SOCIALES II. 2020 RESERVA 4. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente es: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$f(1)=3$
$f'(x)=2x-6 \Rightarrow f'(1)=-4$

Sustituyendo, tenemos: $y-3=-4\cdot(x-1) \Rightarrow y=-4x+7$

b) Igualamos la primera derivada a cero: $f'(x)=0 \Rightarrow 2x-6=0 \Rightarrow x=3$

	$(-\infty,3)$	$(3,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$
Función	D	C

La función es creciente en $(3,+\infty)$. Decreciente en $(-\infty,3)$ y tiene un mínimo en $x=3$

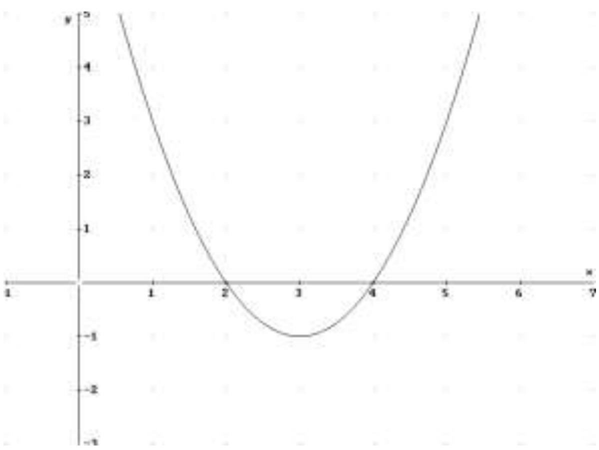
c) Calculamos la integral: $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2x-6)\,dx=x^2-6x+C$

Calculamos C: $f(1)=3 \Rightarrow 1^2-6\cdot 1+C=3 \Rightarrow C=8$

Luego, la función es: $f(x)=x^2-6x+8$

Dibujamos la función

x	$y=x^2-6x+8$
Vértice $-\frac{b}{2a}=\frac{6}{2}=3$	-1
2	0
4	0
1	3
5	3



Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} & si \quad x<-2 \\ x^2+a & si \quad x\geq -2 \end{cases}$

a) (1 punto) Calcule el valor de *a* para que *f* sea continua en todo su dominio. Para ese valor de *a*, ¿es derivable la función *f*?

b) (0'5 puntos) Para $a=-6$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=3$.

c) (1 punto) Para $a=-6$, esboce la gráfica de *f* y calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función *f*, el eje de abscisas y las rectas $x=3$ y $x=5$

SOCIALES II. 2020 RESERVA 4. EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

a) La función $\dfrac{2}{x+1}$ es continua y derivable en su dominio $\mathbb{R}-\{-1\}$. La función x^2+a al ser polinómica es continua y derivable en su dominio. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y derivabilidad en $x=-2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-}\left(\dfrac{2}{x+1}\right)=-2 \\ \lim\limits_{x\to -2^+}\left(x^2+a\right)=4+a \end{array}\right\} \Rightarrow -2=4+a \Rightarrow a=-6$$

Calculamos la derivada $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-2}{(x+1)^2} & si \quad x<-2 \\ 2x & si \quad x>-2 \end{cases}$

Como $f'(-2^-)=-2\neq f'(-2^+)=-4 \Rightarrow$ No es derivable en $x=-2$

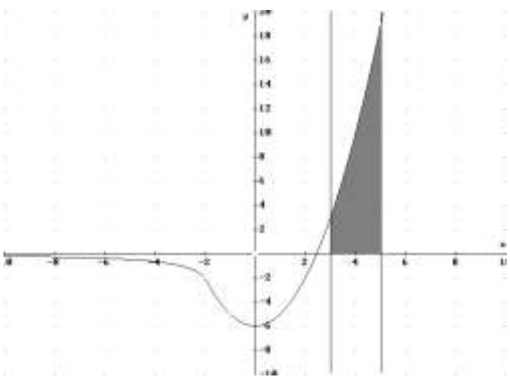
b) La ecuación de la recta tangente es: $y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3)$

$f(3)=3^2-6=3$

$f'(x)=2x \Rightarrow f'(3)=6$

Sustituyendo, tenemos que: $y-3=6\cdot(x-3)\Rightarrow y=6x-15$

c) Dibujamos y calculamos el área



$$A=\int_3^5 (x^2-6)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-6x\right]_3^5=\left(\frac{125}{3}-30\right)-\left(\frac{27}{3}-18\right)=\frac{62}{3}\ u^2$$

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 2+\dfrac{a}{x-1} & si \quad x<0 \\ a+be^{x} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

a) (1'25 puntos) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en su dominio.

b) (0'75 puntos) Para $a=2$ y $b=-2$, estudie la monotonía de la función f y calcule sus extremos relativos.

c) (0'5 puntos) Para $a=2$ y $b=-2$, determine las ecuaciones de las asíntotas de f, si existen.

SOCIALES II. 2020 SEPTIEMBRE. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad y derivabilidad en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} 2+\dfrac{a}{x-1}=2-a \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(a+be^{x})=a+b \end{array}\right\} \Rightarrow 2-a=a+b \Rightarrow 2a+b=2 \text{ Por ser continua}$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{a}{(x-1)^2} & si \quad x<0 \\ be^{x} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$ y como es derivable

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=-a \\ f'(0^+)=b \end{array}\right\} \Rightarrow -a=b \text{ Derivable en } x=3$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 2a+b=2 \\ -a=b \end{array}\right\} \Rightarrow a=2 \,;\, b=-2$

b) Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{(x-1)^2} & si \quad x<0 \\ -2e^{x} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$ y la igualamos a cero

Vemos que no sale ningún valor.

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$-$	$-$
Función	D	D

La función es decreciente en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Luego es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$ y no tiene máximos ni mínimos.

c) Calculamos las asíntotas.

Para $x<0$

En la función $2+\dfrac{2}{x-1}$ no hay ningún valor que anule el denominador, luego no tiene asíntota vertical.

Calculamos $\lim_{x\to -\infty} 2+\frac{2}{x-1}=2 \Rightarrow y=2$ es una asíntota horizontal. Al tener horizontal, no tiene oblicua.

Para $x>0$

No tiene asíntota vertical

Calculamos $\lim_{x\to +\infty} 2-2e^{x}=2-\infty=-\infty \Rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

Calculamos la asíntota oblicua: $y=mx+n$

$m=\lim_{x\to \infty}\frac{2-2e^{x}}{x}=\frac{-\infty}{\infty}\Rightarrow L'Hopital=\lim_{x\to \infty}\frac{-2e^{x}}{1}=-\infty \Rightarrow$ No tiene asíntota oblicua

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} -x+2 & si \quad x\le 2 \\ -x^2+6x-8 & si \quad 2<x<4 \\ \dfrac{x-3}{x} & si \quad x\ge 4 \end{cases}$

a) (1'25 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de *f* en su dominio.
b) (0'75 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*.
c) Calcule $\int_2^3 f(x)\,dx$

SOCIALES II. 2020 SEPTIEMBRE EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

a) La función $-x+2$ es continua y derivable en su dominio. La función $-x^2+6x-8$ es continua y derivable en su dominio. La función $\dfrac{x-3}{x}$ es continua y derivable en su dominio $\mathbb{R}-\{0\}$. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y derivabilidad en $x=2$ y $x=4$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-}(-x+2)=0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+}(-x^2+6x-8)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(2)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=0 \Rightarrow \text{Es continua en } x=2$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-}(-x^2+6x-8)=0 \\ \lim\limits_{x\to 4^+}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)=\dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 4^-} f(x)\ne \lim_{x\to 4^+} f(x) \Rightarrow \text{No es continua ni derivable en } x=4$$

Calculamos la derivada: $f'(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x<2 \\ -2x+6 & si \quad 2<x<4 \\ \dfrac{3}{x^2} & si \quad x>4 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=-1 \\ f'(2^+)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)\ne f'(2^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x=2$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=-2x+6=0 \Rightarrow x=3$.

	$(-\infty,2)$	$(2,3)$	$(3,4)$	$(4,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Función	D	C	D	C

La función es decreciente en $(-\infty,2)\cup(3,4)$ y creciente en $(2,3)\cup(4,+\infty)$.

Tiene un mínimo relativo (pico) en $(2,0)$ y un máximo relativo en $(3,1)$.

c) Calculamos la integral

$$\int_2^3(-x^2+6x-8)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}-8x\right]_2^3=\left(-\frac{27}{3}+27-24\right)-\left(-\frac{8}{3}+12-16\right)=\frac{2}{3}$$