

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3
- Reserva 1, Ejercicio 3
- Reserva 2, Ejercicio 7
- Reserva 3, Ejercicio 7
- Reserva 4, Ejercicio 7

emestrada

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) (1'5 puntos) Estudia el rango de A según los valores de m .

b) (1 punto) Para $m = 2$, calcula la inversa de $2020A$.

MATEMÁTICAS II. 2020. JUNIO. EJERCICIO 3

RESOLUCIÓN

a) Calculamos el determinante de la matriz A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - m \cdot (m+1) - m \cdot (m+2) = -2m^2 - 3m + 5 = 0 \Rightarrow m = 1; m = -\frac{5}{2}$$

Para $m = 1$ y $m = -\frac{5}{2} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

Luego:

	Rango(A)
$m = 1$	2
$m = -\frac{5}{2}$	2
$m \neq 1$ y $-\frac{5}{2}$	3

b) Calculamos la inversa de $2020A$ para $m = 2$:

$$|2020A| = 2020^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2020^3 \cdot (5 - 6 - 8) = 2020^3 \cdot (-9)$$

$$(2020A)^{Adj} = 2020^2 \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 5 & -3 & -2 \\ -7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow ((2020A)^{Adj})^t = 2020^2 \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2020A)^{-1} = \frac{((2020A)^{Adj})^t}{|2020A|} = \frac{2020^2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}{2020^3 \cdot (-9)} = -\frac{1}{18180} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2'5 puntos) Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ c & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determina a , b y c sabiendo que

$A \cdot B = C$ y la matriz A tiene rango 2.

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO 3.

RESOLUCIÓN

$$A \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ c & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1+a+b=2 \\ c+1+4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ c=-4 \end{cases}$$

$$R(A) = 2 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ c & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4a + b \cdot c + 1 - a \cdot c - 4 - b = 0 \Rightarrow 4a + b \cdot c - a \cdot c - b = 3$$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones, obtenemos que: $a = \frac{8}{13}$; $b = \frac{5}{13}$; $c = -4$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

a) (1'5 Puntos). Calcula A^{37} y A^{41} .

b) (1 Punto). Halla el determinante de la matriz $3A^{52}(A^t)^4$, donde A^t es la traspuesta de la matriz A

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 2. EJERCICIO 7

RESOLUCIÓN

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^{37} = A^{3 \cdot 12 + 1} = (A^3)^{12} \cdot A = (I)^{12} \cdot A = A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{41} = A^{3 \cdot 13 + 2} = (A^3)^{13} \cdot A^2 = (I)^{13} \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) Calculamos $|A| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

Calculamos el determinante de la matriz que nos piden

$$\begin{aligned} |3A^{52}(A^t)^4| &= |3A \cdot A^{51} \cdot (A^t)^4| \xrightarrow{\text{Paso 1}} = |3A| \cdot |A^{51}| \cdot |(A^t)^4| \xrightarrow{\text{Paso 2}} = 3^2 |A| \cdot |A|^{51} \cdot |A|^4 = \\ &= 3^2 \cdot 1 \cdot 1^{51} \cdot 1^4 = 9 \end{aligned}$$

Paso 1: Propiedad $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Paso 2: Propiedad $|k \cdot A_n| = k^n |A_n|$ y propiedad $|A^t| = |A|$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1 Punto). Sabiendo que una matriz X verifica $X^3AX = B^2$, halla los posibles valores de su determinante.

b) (1'5 Puntos). Determina, si existe, una matriz Y que verifique $A^2YB^{-1} = A$

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 3. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los determinantes de A y B

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \quad ; \quad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

$$\begin{aligned} |X^3AX| &= |B^2| \xrightarrow{\text{Paso 1}} = |X| \cdot |X| \cdot |X| \cdot |A| \cdot |X| = |B| \cdot |B| \Rightarrow |X|^4 \cdot 1 = (-2) \cdot (-2) \Rightarrow \\ \Rightarrow |X| &= \sqrt[4]{4} = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

En el paso 1 hemos aplicado la propiedad: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

b) Si multiplicamos por $(A^2)^{-1}$ a la izquierda y por B a la derecha, nos queda:

$$(A^2)^{-1} \cdot A^2 \cdot Y \cdot B^{-1} \cdot B = (A^2)^{-1} \cdot A \cdot B \Rightarrow Y = A^{-1} \cdot B$$

Calculamos la matriz inversa de A

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$Y = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & -3 \\ m-1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) (1 Punto). Determina los valores de m para los que la ecuación $AX + B = C$ tiene solución única.

b) (1'5 Puntos). Para $m = 0$, halla X tal que $AX + B = C$.
MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 4. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) $AX + B = C \Rightarrow AX = C - B$. Esta ecuación tiene solución si la matriz A tiene inversa, es decir, si su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & -3 \\ m-1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3m - 3 - 2m^2 + 2m + 4m = 0 \Rightarrow -2m^2 + 9m + 5 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}; m = 5$$

Por lo tanto, la ecuación tiene solución única para todos los valores de $m \neq -\frac{1}{2}$ y $m \neq 5$.

b) Calculamos la matriz inversa de A para $m = 0$.

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}^t}{5} = \frac{\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{5} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial y calculamos la matriz X .

$$AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C - B) \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$$

$$X = A^{-1}(C - B) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$$