EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2020

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1
- Junio, Ejercicio 5
- Reserva 1, Ejercicio 1
- Reserva 1, Ejercicio 5
- Reserva 2, Ejercicio 1
- Reserva 2, Ejercicio 5
- Reserva 3, Ejercicio 1
- Reserva 3, Ejercicio 5
- Reserva 4, Ejercicio 1
- Reserva 4, Ejercicio 5
- Septiembre, Ejercicio 1
- Septiembre, Ejercicio 5

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$ para $x\neq 1,\,-1$

a) (1'25 puntos) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) (1'25 puntos) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

MATEMÁTICAS II. 2020. JUNIO. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R}-\{1,-1\}$.

Asíntotas Verticales: En principio son las rectas $x=1$ y $x=-1$. Vamos a comprobarlo

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{-4}{0^-}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{-4}{0^+}=-\infty$$

Luego $x=1$ es una asíntota vertical

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow \text{L'H}\hat{\text{o}}\text{pital}\Rightarrow \lim_{x\to -1^-}\frac{2x-2}{2x}=\frac{-4}{-2}=2$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow \text{L'H}\hat{\text{o}}\text{pital}\Rightarrow \lim_{x\to -1^+}\frac{2x-2}{2x}=\frac{-4}{-2}=2$$

Luego, no tiene asíntota vertical en $x=-1$

Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow \text{L'H}\hat{\text{o}}\text{pital}\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{2x-2}{2x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow \text{L'H}\hat{\text{o}}\text{pital}\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{2}{2}=1$$

Luego $y=1$ es una asíntota horizontal.

Asíntota Oblicua: No tiene, ya que tiene asíntota horizontal

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y'=\dfrac{2x^2+4x+2}{(x^2-1)^2}=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow$ No sirve, ya que no está en el dominio

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	+	+
Función	C	C	C

Creciente: $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

Sea $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{sen(x)}{2-\cos(x)}$

a) (2 puntos) Halla los extremos absolutos de *f* (abscisas donde de obtienen y valores que se alcanzan).

b) (0'5 puntos) Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisas $x=\dfrac{\pi}{3}$.

MATEMÁTICAS II. 2020. JUNIO. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=\frac{\cos x\cdot(2-\cos x)-sen\,x\cdot sen\,x}{(2-\cos x)^2}=\frac{2\cos x-\cos^2 x-sen^2 x}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x-1}{(2+\cos x)^2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}\ ;\ x=\frac{5\pi}{3}$$

	$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$
Signo f'	+	−	+
Función	C	D	C

Máximo relativo en $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y mínimo relativo en $\left(\dfrac{5\pi}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Calculamos los valores que toma la función en los extremos

$$f(0)=\frac{sen\,0}{2-\cos 0}=\frac{0}{1}=0$$

$$f(2\pi)=\frac{sen\,2\pi}{2-\cos 2\pi}=\frac{0}{1}=0$$

Luego, el máximo absoluto es $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y el mínimo absoluto $\left(\dfrac{5\pi}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) Tangente: $y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{sen\dfrac{\pi}{3}}{2-\cos\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{\sqrt{3}}{3}=0\cdot\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Normal: $y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}\cdot(x-a)\Rightarrow y-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=-\dfrac{1}{0}\cdot\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}$

(2'5 puntos) Calcula *a* sabiendo que $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(1-x)} - \frac{ax-1}{x} \right) = \frac{7}{2}$ (ln denota la función logaritmo neperiano).
MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

$$\frac{7}{2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(1-x)} - \frac{ax-1}{x} \right) = \infty - \infty = \lim_{x \to 0} \frac{x - (ax-1)\ln(1-x)}{x \cdot \ln(1-x)} = \frac{0}{0} \to L'H\hat{o}pital =$$

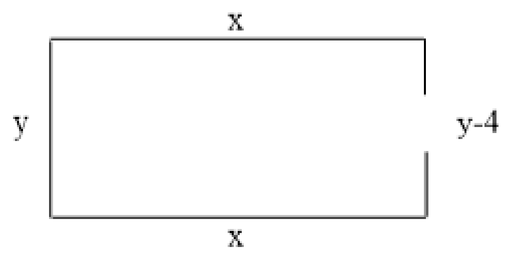
$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - a\ln(1-x) - (ax-1) \cdot \left(\frac{-1}{1-x} \right)}{1 \cdot \ln(1-x) + x \cdot \left(\frac{-1}{1-x} \right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - a\ln(1-x) + \frac{ax-1}{1-x}}{\ln(1-x) - \frac{x}{1-x}} = \frac{0}{0} \to L'H\hat{o}pital =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{a}{1-x} + \frac{a \cdot (1-x) + 1 \cdot (ax-1)}{(1-x)^2}}{-\frac{1}{1-x} - \frac{1 \cdot (1-x) + 1 \cdot x}{(1-x)^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{a}{1-x} + \frac{a-1}{(1-x)^2}}{-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2}} = \frac{a+a-1}{-1-1} = \frac{2a-1}{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a - 1 = -7 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3$$

(2'5 puntos) Una familia desea acotas una zona rectangular en el jardín de su casa para dedicarla al cultivo ecológico. Para ello dispone de 96 metros de valla, pero necesita una abertura de 4 metros en uno de los laterales para instalar una puerta. Determina las dimensiones de la zona rectangular de área máxima que puede acotarse de esta manera y el valor del área.
MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $S_{\max} = x \cdot y$

b) Relación entre las variables: $96 = 2x + y + y - 4 \Rightarrow y = \dfrac{100 - 2x}{2} = 50 - x$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max} = x \cdot y = x \cdot (50 - x) = 50x - x^2$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\max} = 50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25\ m$$

e) Comprobamos que es un máximo

$$S''(x) = -2 \Rightarrow S''(25) = -2 < 0 \Rightarrow máximo$$

Luego, las dimensiones son: $x = 25\ m$; $y = 25\,m$.

El área máxima es: $S_{\max} = x \cdot y = 25 \cdot 25 = 625\ m^2$

(2’5 puntos) Sabiendo que $\lim_{x \to 0} \frac{xe^x - \ln(1+x) - (a+1)x}{x^2}$ es finito, calcula *a* y el valor del límite (ln denota la función logaritmo neperiano).

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 2. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \to 0} \frac{xe^x - \ln(1+x) - (a+1)x}{x^2} = \frac{0}{0} \to L'H\hat{o}pital = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + xe^x - \frac{1}{1+x} - (a+1)}{2x} = \frac{-(a+1)}{0}$$

Si es finito el límite $\Rightarrow -(a+1) = 0 \Rightarrow a = -1$

Calculamos el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{xe^x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{0}{0} \to L'H\hat{o}pital = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + xe^x - \frac{1}{1+x}}{2x} = \frac{0}{0} \to L'H\hat{o}pital =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^x + xe^x + \frac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{1+1+1}{2} = \frac{3}{2}$$

Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{|x|}{2-x}$ para $x\neq 2$.
a) (1'25 Puntos). Estudia la derivabilidad de f.
b) (1'25 Puntos). Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 2. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) La función es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$. Abrimos la función $f(x)=\dfrac{|x|}{2-x}=\begin{cases}\dfrac{-x}{2-x} & si \quad x<0\\[2mm] \dfrac{x}{2-x} & si \quad x\geq 0\end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad de $f(x)$, en $x=0$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{(2-x)^2} & si \quad x<0\\[2mm] \dfrac{2}{(2-x)^2} & si \quad x>0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}\\[2mm] f'(0^+)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow f'(0^-)\neq f'(0^+)\Rightarrow \text{No derivable}$$

Luego la función es derivable en $\mathbb{R}-\{0\,y\,2\}$

b) Igualamos a cero la primera derivada:

$$\frac{-2}{(2-x)^2}=0\Rightarrow No$$
$$\frac{2}{(2-x)^2}=0\Rightarrow No$$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Signo $f'(x)$	—	+	+
Función $f(x)$	D	C	C

La función es creciente $(0,2)\cup(2,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,0)$. Tiene un mínimo relativo (pico) en $(0,0)$ donde la función no es derivable.

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ para $x\neq 1,-1$.

a) (1'25 Puntos). Estudia y halla las asíntotas a la gráfica de *f*.

b) (1'25 Puntos). Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 3. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical: $x=1$ y $x=-1$.

Ya que $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3}{x^2-1}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^3}{x^2-1}=+\infty$

Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{2}=\infty\Rightarrow$ No tiene.

Asíntota oblicua: $y=x$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{x^2-1}\right]=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2x}\right]=0$$

b) Calculamos la derivada de la función e igualamos a cero.

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=-\sqrt{3}\ ;\ x=\sqrt{3}$$

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
Signo y'	+	—	—	—	—	+
Función	C	D	D	D	D	C

La función es creciente en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup\left(-1,0\right)\cup\left(0,1\right)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)$

Tiene un Máximo en $\left(-\sqrt{3},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ y un mínimo en $\left(\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

(2'5 Puntos). Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tiene un punto crítico en $x=0$, que su gráfica pasa por $(0,3)$ y que la recta $y=-2x+2$ es tangente a dicha gráfica en el punto de abscisa $x=1$. Calcula *a, b , c* y *d*.
MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 3. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

Calculamos su derivada primera: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

- Punto crítico en $x=0 \Rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow 3a\cdot 0+2b\cdot 0+c=0 \Rightarrow c=0$

- Pasa por $(0,3) \Rightarrow f(0)=3 \Rightarrow a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=3 \Rightarrow d=3$

- La pendiente de la recta tangente en $x=1$ es -2, luego:

$$f'(1)=-2 \Rightarrow 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c=-2 \Rightarrow 3a+2b=-2$$

- Si $x=1 \Rightarrow y=-2\cdot 1+2=0$. Luego, la función pasa por el punto $(1,0)$. Por lo tanto:

$$f(1)=0 \Rightarrow a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d=0 \Rightarrow a+b+3=0 \Rightarrow a+b=-3$$

Resolviendo el sistema $\left.\begin{array}{r} 3a+2b=-2 \\ a+b=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow a=4\ ;\ b=-7$

Luego: $f(x)=4x^3-7x^2+3$

(2'5 Puntos). Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(5-x)\cdot e^{x-4}$. Determina los puntos de la gráfica de f cuya recta tangente tiene pendiente máxima.
MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 4. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

La pendiente de la recta tangente es máxima en el punto de inflexión. Luego vamos a calcular los puntos de inflexión de esta función.

$$f'(x)=-1\cdot e^{x-4}+(5-x)\cdot e^{x-4}=(4-x)\cdot e^{x-4}$$

$$f''(x)=-1\cdot e^{x-4}+(4-x)\cdot e^{x-4}=(3-x)\cdot e^{x-4}$$

Igualando a cero la segunda derivada, obtenemos:

$$f''(x)=(3-x)\cdot e^{x-4}=0\Rightarrow x=3$$

	$(-\infty,3)$	$(3,\infty)$
Signo $f''(x)$	+	−
Función $f(x)$	Cx	Cn

Luego, el punto de inflexión es: $\left(3,\dfrac{2}{e}\right)$

(2'5 Puntos). Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ tiene un punto crítico en $x=2$ y que la recta normal a su gráfica en el punto de abscisa $x=1$ es $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$. Calcula *a*, *b* y *c*.

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 4. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

Calculamos su derivada primera: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

- Punto crítico en $x=2\Rightarrow f'(2)=0\Rightarrow 3a\cdot 4+2b\cdot 2+c=0\Rightarrow 12a+4b+c=0$

- La pendiente de la recta normal en $x=1$ es $\frac{1}{2}$, con lo cual la tangente tiene de pendiente -2, luego:

$$f'(1)=-2\Rightarrow 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c=-2\Rightarrow 3a+2b+c=-2$$

- Si $x=1\Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{3}{2}=2$. Luego, la función pasa por el punto $(1,2)$. Por lo tanto:

$$f(1)=2\Rightarrow a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1-1=2\Rightarrow a+b+c=3$$

Resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} a+b+c= 3 \\ 3a+2b+c=-2 \\ 12a+4b+c= 0 \end{array}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 12 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-12\cdot F_1]{F_2-3\cdot F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -11 \\ 0 & -8 & -11 & -36 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-8\cdot F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 5 & 52 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z= 3 \\ -y-2z=-11 \\ 5z= 52 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3-y-z=3+\frac{49}{5}-\frac{52}{5}=\frac{12}{5} \\ y=11-2z=11-2\cdot\frac{52}{5}=-\frac{49}{5} \\ z=\frac{52}{5} \end{array}\right.$$

Luego, la función es: $f(x)=\frac{12}{5}x^3-\frac{49}{5}x^2+\frac{52}{5}x-1$

(2'5 puntos) Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por: $f(x)=e^x(x^2-5x+6)$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de *f* y los puntos de inflexión de su gráfica.
MATEMÁTICAS II. 2020. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=e^x(x^2-5x+6)+(2x-5)\cdot e^x=e^x\left(x^2-3x+1\right)$$

$$f''(x)=e^x(x^2-3x+1)+(2x-3)\cdot e^x=e^x\left(x^2-x-2\right)=0\Rightarrow x=-1\ ;\ x=2$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,\infty)$
Signo f''	+	—	+
Función	Cx	Cn	Cx

La función es cóncava en $(-1,2)$ y convexa en $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

Puntos de inflexión en $\left(-1,\dfrac{12}{e}\right)$ y $(2,0)$

Sea la función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} e^{2ax-4b} & si \quad x<1 \\ 1-x\ln x & si \quad x\geq 1\end{cases}$

(ln denota la función logaritmo neperiano)
a) (1’75 puntos) Determina los valores de *a* y *b*.
b) (0’75 puntos) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$.
MATEMÁTICAS II. 2020. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 5.

R E S O L U C I Ó N

a) La función es derivable, luego, tiene que ser continua.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} e^{2ax-4b}=e^{2a-4b} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 1-x\ln x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow e^{2a-4b}=1\Rightarrow (2a-4b)\ln e=\ln 1=0\Rightarrow 2a-4b=0\Rightarrow a=2b$$

Calculamos $f'(x)=\begin{cases} 2a\cdot e^{2ax-4b} & si \quad x<1 \\ -\ln x-1 & si \quad x\geq 1\end{cases}$

Como es derivable se cumple que: $f'(1^-)=f'(1^+)\Rightarrow 2a\cdot e^{2a-4b}=-1-\ln 1\Rightarrow 2a\cdot e^{2a-4b}=-1$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} a=2b \\ 2a\cdot e^{2a-4b}=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 4b\cdot e^{0}=-1\Rightarrow 4b=-1\Rightarrow b=-\frac{1}{4}\ ;\ a=-\frac{1}{2}$$

b) La ecuación de la recta tangente en $x=2$ es $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$

$$f(2)=1-2\ln 2$$
$$f'(2)=-1-\ln 2$$

Luego la recta tangente es $y-1+2\ln 2=(-1-\ln 2)\cdot(x-2)\Rightarrow (1+\ln 2)x+y-3=0$