EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2020

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2
- Junio, Ejercicio 6
- Reserva 1, Ejercicio 2
- Reserva 1, Ejercicio 6
- Reserva 2, Ejercicio 2
- Reserva 2, Ejercicio 6
- Reserva 3, Ejercicio 2
- Reserva 3, Ejercicio 6
- Reserva 4, Ejercicio 2
- Reserva 4, Ejercicio 6
- Septiembre, Ejercicio 2
- Septiembre, Ejercicio 6

(2'5 puntos) Calcula $a>0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x)=x\cdot e^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x=a$ vale $\frac{1}{9}$.

MATEMÁTICAS II. 2020. JUNIO. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x\cdot e^{3x} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x\cdot e^{3x}=0 \Rightarrow x=0$$

Calculamos el área haciendo la integral por partes

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=e^{3x}\,dx \Rightarrow v=\frac{1}{3}e^{3x} \end{array}}$$

$$A=\int_0^a x\cdot e^{3x}\,dx=\left[\frac{1}{3}x\cdot e^{3x}\right]_0^a-\frac{1}{3}\int_0^a e^{3x}\,dx=\left[\frac{1}{3}x\cdot e^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}\right]_0^a=\left(\frac{1}{3}a\cdot e^{3a}-\frac{1}{9}e^{3a}\right)-\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{9}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}a\cdot e^{3a}-\frac{1}{9}e^{3a}=0\Rightarrow e^{3a}\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{9}\right)=0\Rightarrow \frac{1}{3}a-\frac{1}{9}=0\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

Sea *f* la función dada por: $f(x)=\dfrac{3x^2+4}{(x-2)^2}$ **para** $x\neq 2$

a) (2 puntos) Calcula $\int f(x)\,dx$

b) (0'5 puntos) Calcula la primitiva de *f* que pasa por el punto $(3,5)$

MATEMÁTICAS II. 2020. JUNIO. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

La función $f(x)=\dfrac{3x^2+4}{(x-2)^2}=\dfrac{3x^2+4}{x^2-4x+4}$

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{3x^2+4}{x^2-4x+4}\,dx=\int 3\,dx+\int \frac{12x-8}{x^2-4x+4}\,dx=3x+\int \frac{12x-8}{x^2-4x+4}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-4x+4=0\Rightarrow x=2\ ;\ x=2$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{12x-8}{x^2-4x+4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo, luego:

$$x=2\Rightarrow 16=B$$
$$x=0\Rightarrow -8=-2A+B\Rightarrow -8=-2A+16\Rightarrow A=12$$

Con lo cual:

$$\int \frac{3x^2+4}{x^2-4x+4}\,dx=3x+\int \frac{12x-8}{x^2-4x+4}\,dx=3x+\int \frac{12}{x-2}\,dx+\int \frac{16}{(x-2)^2}\,dx=$$
$$=3x+12\ln|x-2|+16\int (x-2)^{-2}\,dx=3x+12\ln|x-2|+16\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+C=$$
$$=3x+12\ln|x-2|-\frac{16}{x-2}+C$$

b) Calculamos la primitiva que pasa por $(3,5)$

$$F(x)=3x+12\ln|x-2|-\frac{16}{x-2}+C\Rightarrow F(3)=5\Rightarrow 9+12\ln|1|-16+C=5\Rightarrow C=12$$

Luego: $F(x)=3x+12\ln|x-2|-\dfrac{16}{x-2}+12$

(2'5 puntos) Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{-x^3+2x-3}{x^2-x}$ para $x\neq 0$, $x\neq 1$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(2,3\ln 2)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.
MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{-x^3+2x-3}{x^2-x}\,dx=\int (-x-1)\,dx+\int \frac{x-3}{x^2-x}\,dx=-\frac{x^2}{2}-x+\int \frac{x-3}{x^2-x}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-x=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x-3}{x^2-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+Bx}{x\cdot(x-1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=0\Rightarrow -3=-A\Rightarrow A=3$$
$$x=1\Rightarrow -2=B\Rightarrow B=-2$$

Con lo cual:

$$F(x)=\int \frac{-x^3+2x-3}{x^2-x}\,dx=-\frac{x^2}{2}-x+\int \frac{x-3}{x^2-x}\,dx=-\frac{x^2}{2}-x+\int \frac{3}{x}\,dx-\int \frac{2}{x-1}=$$
$$=-\frac{x^2}{2}-x+3\ln|x|-2\ln|x-1|+C$$

Calculamos la función que pasa por el punto $(2,3\ln 2)$

$$F(x)=-\frac{x^2}{2}-x+3\ln|x|-2\ln|x-1|+C\Rightarrow 3\ln 2=-2-2+3\ln 2-2\ln 1+C\Rightarrow C=4$$

Luego, la función que nos piden es: $F(x)=-\dfrac{x^2}{2}-x+3\ln|x|-2\ln|x-1|+4$

(2'5 puntos) Calcula $\int \ln(x^2+2x+2)\,dx$ donde ln denota logaritmo neperiano.

(Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t=x+1$).

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$t=x+1 \Rightarrow x=t-1$$
$$dt=dx$$

Sustituimos:

$$\int \ln\left[(t-1)^2+2(t-1)+2\right]dt=\int \ln\left(t^2+1-2t+2t-2+2\right)dt=\int \ln\left(t^2+1\right)dt$$

Hacemos la integral por partes

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln(t^2+1);\ du=\dfrac{2t}{t^2+1}\,dt \\ dv=dt \quad ; \quad v=t \end{array}}$$

$$\int \ln\left(t^2+1\right)dt=t\cdot\ln\left(t^2+1\right)-\int \frac{2t^2}{t^2+1}dt$$

Dividimos los dos polinomios y descomponemos la integral

$$\int \ln\left(t^2+1\right)dt=t\cdot\ln\left(t^2+1\right)-\int \frac{2t^2}{t^2+1}dt=t\cdot\ln\left(t^2+1\right)-\left[\int\left(2-\frac{2}{t^2+1}\right)dt\right]=$$
$$=t\cdot\ln\left(t^2+1\right)-\int 2\ dt+2\int\frac{dt}{t^2+1}=t\cdot\ln\left(t^2+1\right)-2t+2\,arc\,tg\,t+C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$\int \ln\left(t^2+1\right)dt=t\cdot\ln\left(t^2+1\right)-2t+2\,arc\,tg\,t+C=(x+1)\cdot\ln\left((x+1)^2+1\right)-2(x+1)+2\,arc\,tg\,(x+1)+C=$$
$$=(x+1)\cdot\ln\left(x^2+2x+2\right)-2(x+1)+2\,arc\,tg\,(x+1)+C$$

(2'5 Puntos). Determina la función $f:(-1,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, sabiendo que es dos veces derivable, su gráfica pasa por el punto $(0,1)$, $f'(0)=0$ y $f''(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 2. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Integramos dos veces para calcular la expresión de $f(x)$.

$$f'(x)=\int \frac{1}{x+1}\,dx=\ln(x+1)+C$$

Como $f'(0)=0\Rightarrow \ln(0+1)+C=0\Rightarrow C=0$

Calculamos: $f(x)=\int \ln(x+1)\,dx$

Hacemos la integral por partes

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln(x+1);\ du=\dfrac{1}{x+1}\,dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

$$f(x)=\int \ln(x+1)\,dx=x\cdot\ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}dx=x\cdot\ln(x+1)-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=$$
$$=x\cdot\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+D$$

Calculamos la constante *D*.

- Pasa por $(0,1)\Rightarrow 1=0\cdot\ln(0+1)-0+\ln(0+1)+D\Rightarrow D=1$

Luego, la función es: $f(x)=x\cdot\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+1$

Considera las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=-4x+2$ y $g(x)=-x^2+2x+c$.
a) (1 punto). Halla el valor de c sabiendo que sus gráficas se cortan en el punto en el que g alcanza su máximo.
b) (1'5 Puntos). Para $c=-3$, calcula el área de la región limitada por ambas gráficas.
MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 2. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el máximo de $g(x)$.

$$g'(x)=-2x+2=0\Rightarrow x=1$$

	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
Signo $g'(x)$	+	–
Función $g(x)$	C	D

La función es creciente $(-\infty,1)$ y decreciente en $(1,\infty)$. Tiene un máximo en $x=1$.

Luego, en el punto de corte se cumple que: $f(1)=g(1)\Rightarrow -4+2=-1+2+c\Rightarrow c=-3$

b) Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones.

$$-4x+2=-x^2+2x-3\Rightarrow x^2-6x+5=0\Rightarrow x=1\ ;\ x=5$$

Cogemos un valor entre 1 y 5 para ver qué función va por encima y cuál por debajo

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=-4\cdot 2+2=-6 \\ g(2)=-2^2+2\cdot 2-3=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow g(x) \text{ va por encima de } f(x)$$

Luego, el área de la región pedida es:

$$A=\int_1^5\left[(-x^2+2x-3)-(-4x+2)\right]dx=\int_1^5(-x^2+6x-5)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2-5x\right]_1^5=$$

$$=\left(-\frac{125}{3}+75-25\right)-\left(-\frac{1}{3}+3-5\right)=\frac{32}{3}\ u^2$$

(2'5 Puntos). Determina la única función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumple que $f(0)=1, f'(0)=1$ y $f''(x)=e^x(x+2)$.

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 3. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral, que es una integral por partes.

$$u = x+2;\ du = dx$$
$$dv = e^x\,dx;\ v = e^x$$

$$f'(x) = \int (x+2)e^x\,dx = (x+2)\cdot e^x - \int e^x\,dx = (x+2)\cdot e^x - e^x + C$$

Volvemos a hacer la integral por partes.

$$f(x) = \int \left[(x+2)e^x - e^x + C\right]dx = \int (x+2)e^x\,dx - \int e^x\,dx + \int C\,dx =$$
$$= (x+2)\cdot e^x - e^x - e^x + Cx + D = x\cdot e^x + Cx + D$$

Calculamos las dos constantes.

$$f'(0)=1 \Rightarrow (0+2)\cdot e^0 - e^0 + C = 1 \Rightarrow 2-1+C=1 \Rightarrow C=0$$

$$f(0)=1 \Rightarrow 0\cdot e^0 + C\cdot 0 + D = 1 \Rightarrow D=1$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $f(x) = x\cdot e^x + 1$

(2'5 Puntos). Calcula el valor de $a > 0$ para que el área comprendida entre la parábola $y = 3x^2 - 2ax$ y el eje de abscisas sea de 4 unidades cuadradas.
MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 3. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x^2 - 2ax \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2 - 2ax = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = \frac{2a}{3}$$

Vemos que función va por encima y cual por debajo, para ello sustituimos un valor entre 0 y $\frac{2a}{3}$, por ejemplo, $\frac{a}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} y = 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2a\left(\frac{a}{3}\right) = -\frac{a}{3} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ La parábola va por debajo}$$

Luego:

$$A = 4 = \int_0^{\frac{2a}{3}} (0 - 3x^2 + 2ax)\, dx = \left[-\frac{3x^3}{3} + \frac{2ax^2}{2} \right]_0^{\frac{2a}{3}} = \left[-x^3 + ax^2 \right]_0^{\frac{2a}{3}} = \left[-\frac{8a^3}{27} + \frac{4a^3}{9} \right] = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8a^3 + 12a^3 = 108 \Rightarrow 4a^3 = 108 \Rightarrow a = \sqrt[3]{27} = 3$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(t)=\dfrac{1}{1+e^{t}}$

a) (1'5 Puntos). Calcula $\int f(t)\,dt$ (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $x=1+e^{t}$).

b) (1 Punto). Se define $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}$

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 4. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a)

$$x=1+e^{t}\Rightarrow dx=e^{t}dt\Rightarrow dt=\frac{dx}{e^{t}}=\frac{dx}{x-1}$$

$$\int f(t)\,dt=\int\frac{1}{1+e^{t}}\,dt=\int\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x-1}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=0\Rightarrow 1=-A\Rightarrow A=-1$$

$$x=1\Rightarrow 1=B\Rightarrow B=1$$

Con lo cual:

$$\int\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x-1}=\int\frac{-1}{x}\,dx+\int\frac{1}{x-1}\,dx=-\ln|x|+\ln|x-1|+C=-\ln\left|1+e^{t}\right|+\ln\left|e^{t}\right|+C=-\ln\left|1+e^{t}\right|+t+C$$

b)

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\Big[-\ln\left|1+e^{t}\right|+t+C\Big]_0^x=\Big[-\ln\left|1+e^{x}\right|+x+C\Big]-\Big[-\ln\left|1+e^{0}\right|+0+C\Big]=$$
$$=-\ln\left|1+e^{x}\right|+x+C+\ln\left|1+e^{0}\right|-0-C=-\ln\left|1+e^{x}\right|+x+\ln 2$$

Calculamos el límite que nos piden

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\ln\left|1+e^{x}\right|+x+\ln 2}{x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{L'H\hat{o}pital}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}+1}{1}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

(2'5 Puntos). Calcula $\int \cos(\ln x)\,dx$ (ln denota la función logaritmo neperiano)

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 4. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

Es una integral por partes cíclica.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\cos(\ln x)\ ;\ du=-\dfrac{1}{x}sen(\ln x)\ dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

$$I=\int \cos(\ln x)\,dx = x\cdot\cos(\ln x)-\int x\cdot\frac{1}{x}(-sen(\ln x))\,dx = x\cdot\cos(\ln x)+\int sen(\ln x)\,dx = x\cdot\cos(\ln x)+I_1$$

Calculamos I_1 por partes:

$$\boxed{\begin{array}{l} u=sen(\ln x)\ ;\ du=\dfrac{1}{x}\cos(\ln x)\ dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

$$I=\int \cos(\ln x)\,dx = x\cdot\cos(\ln x)+I_1 = x\cdot\cos(\ln x)+x\,sen(\ln x)-\int x\cdot\frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx =$$
$$= x\cdot\cos(\ln x)+x\,sen(\ln x)-\int \cos(\ln x)\,dx = x\cdot\cos(\ln x)+x\,sen(\ln x)-I$$

Por lo tanto:

$$2I = x\cos(\ln x)+x\,sen(\ln x)+C \Rightarrow I=\frac{x\cos(\ln x)+x\,sen(\ln x)}{2}+C$$

(2'5 puntos) Calcula $\int_0^{\pi} x \cdot sen^2(x)\, dx$

MATEMÁTICAS II. 2020. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Por trigonometría, sabemos que: $sen^2(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, luego

$$\int_0^{\pi} x \cdot sen^2(x)\, dx = \int_0^{\pi} x \cdot \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x \cdot \cos 2x\, dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x \cdot \cos 2x\, dx$$

Calculamos por partes la integral $\int_0^{\pi} x \cdot \cos 2x\, dx$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x;\ du = dx \\ dv = \cos 2x\, dx;\ v = \dfrac{sen\, 2x}{2} \end{array}}$$

$$\int_0^{\pi} x \cdot \cos 2x\, dx = \left[\frac{x \cdot sen\, 2x}{2}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} sen\, 2x\, dx = \left(\frac{\pi \cdot sen\, 2\pi}{2}\right) - \left(\frac{0 \cdot sen\, 0}{2}\right) - \left[-\frac{\cos 2x}{4}\right]_0^{\pi} =$$

$$= 0 - 0 + \left(\frac{\cos 2\pi}{4}\right) - \left(\frac{\cos 0}{4}\right) = 0$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{\pi} x \cdot sen^2(x)\, dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x \cdot \cos 2x\, dx = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{\pi^2}{4}$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 2$.

a) (1 punto) Calcula los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g*. Esboza el recinto que determinan.

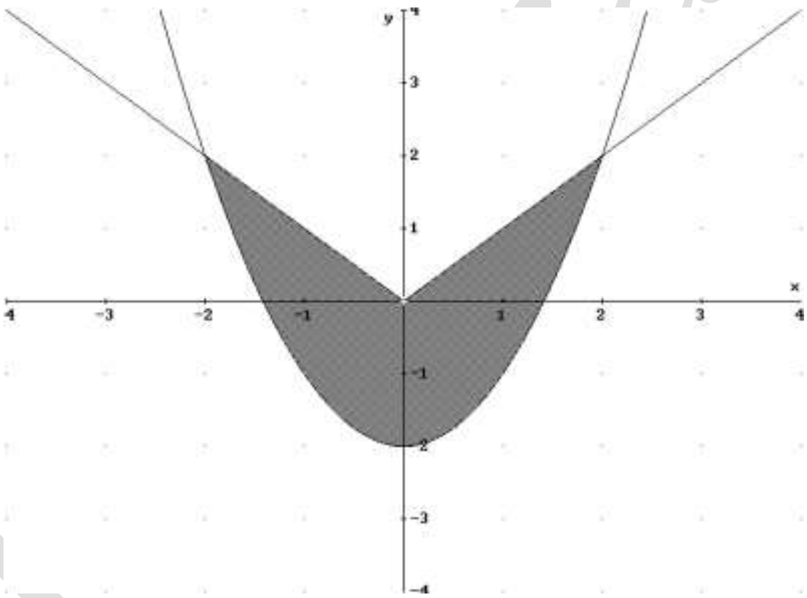
b) (1'5 puntos) Determina el área del recinto anterior.

MATEMÁTICAS II. 2020. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$ son dos rectas, que son la bisectriz del 1º y 3er cuadrante.

La función $f(x) = x^2 - 2$ es una parábola cuyo vértice está en el punto $(0, -2)$ y corta al eje X en los puntos $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$.



Calculamos los puntos de corte de las gráficas.

$x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \ ; \ x = 2$. Sólo sirve $x = 2$

$x^2 - 2 = -x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \ ; \ x = -2$. Sólo sirve $x = -2$

Luego, los puntos de corte son: $(-2, 2)$ y $(2, 2)$

b) Calculamos el área del recinto

$$A = 2 \cdot \int_0^2 \left[(x) - (x^2 - 2) \right] dx = 2 \cdot \int_0^2 (-x^2 + x + 2)\ dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 = 2 \cdot \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) = \frac{20}{3}\ u^2$$