EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2021

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 5
- Junio, Ejercicio 6
- Reserva 1, Ejercicio 6
- Reserva 2, Ejercicio 6
- Reserva 3, Ejercicio 5
- Reserva 4, Ejercicio 5
- Julio, Ejercicio 6

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{r} m\,x+2\,y-z= \;\; 1 \\ 5\,x-4\,y+2\,z= \;\; 0 \\ x+3m\,y=m+\dfrac{2}{5} \end{array}\right.$

a) Discute el sistema según los valores de *m*.
b) Resuelve el sistema para $m=0$. ¿Hay alguna solución en la que $x=0$?. En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.
MATEMÁTICAS II. 2021. JUNIO. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & 3m & 0 \end{vmatrix}=4-15m-4-6m^2=-6m^2-15m=0 \Rightarrow m=0\ ;\ m=-\frac{5}{2}$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $m=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}=-10\neq 0 \Rightarrow R(A)=2$

Para $m=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix}=4-4=0 \Rightarrow R(M)=2$

Para $m=-\dfrac{5}{2} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -\frac{15}{2} \end{vmatrix}=-\dfrac{67}{2}\neq 0 \Rightarrow R(A)=2$

Para $m=-\dfrac{5}{2} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{5}{2} & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 1 & -\frac{15}{2} & -\frac{21}{10} \end{vmatrix}=-\dfrac{59}{4}\neq 0 \Rightarrow R(M)=3$

	R(A)	R(M)	
$m=0$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$m=-\frac{5}{2}$	2	3	Sistema incompatible
$m\neq 0\ y\ -\frac{5}{2}$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $m=0$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} 2y-z=1 \\ 5x-4y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2y-z=1 \\ 5x-4y=-2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{5} \\ y=\dfrac{1+t}{2} \\ z=t \end{array}\right.$$

No hay ninguna solución en la que $x=0$, ya que $x=\dfrac{2}{5}$

En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón.
El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora.
¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?.
MATEMÁTICAS II. 2021. JUNIO. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

Planteamos un sistema de ecuaciones.

x = botellas
y = garrafas
z = bidones

$$\left.\begin{array}{r} 0'05x+0'1y+z=10 \\ x=2y \\ x+y+z=52 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 0'1y+0'1y+z=10 \\ 2y+y+z=52 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 0'2y+z=10 \\ 3y+z=52 \end{array}\right\} \Rightarrow x=30\ ;\ y=15\ ;\ z=7$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{cases} x+\ \ my+\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ mz=1 \\ x+2my+(m+1)z=1 \\ 2x+\ \ my+\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ mz=2 \end{cases}\right.$ **.**

a) Discute el sistema según los valores de m.
b) Resuelve el sistema, si es posible, para $m=1$.
MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 1. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 2m & m+1 \\ 2 & m & m \end{vmatrix}=2m^2+2m^2+2m+m^2-4m^2-m^2-m^2-m\Rightarrow -m^2+m=0\Rightarrow m=0\ ;\ m=1$$

Para $m=0\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow R(A)=2$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow R(M)=2$

Para $m=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow R(A)=2$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow R(M)=2$

	R(A)	R(M)	
$m=0$	2	2	S. Compatible indeterminado
$m=1$	2	2	S. Compatible indeterminado
$m\neq 0\ y\ 1$	3	3	S. Compatible determinado

b) Resolvemos el sistema para $m=1$:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{aligned}\right\}\xrightarrow{F_2-F_1}\left.\begin{aligned} x+y+z=1 \\ x=1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow x=1\ ;\ y=-t\ ;\ z=t$$

En una cafetería, tres cafés, una tostada y dos zumos de naranja cuestan 7'50 €. Cuatro cafés, una tostada y un zumo de naranja cuestan 7'20 €.
a) Calcula, de forma razonada, el precio total de dos cafés, una tostada y tres zumos de naranja.
b) ¿El precio de un zumo de naranja podría ser de 2 €?. Razona la respuesta.
MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 2. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) Llamamos $x =$ Precio de un café
$y =$ Precio de una tostada
$z =$ Precio de un zumo de naranja

Planteamos el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} 3x+y+2z=7'50 \\ 4x+y+z=7'20 \end{array}\right\}$

Es un sistema de 2 ecuaciones y 3 incógnitas. En principio, es un sistema compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.
Vamos a resolverlo

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y+2z=7'50 \\ 4x+y+z=7'20 \end{array}\right\} \xrightarrow{F_2-F_1} \left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=7'50 \\ x-z=-0'30 \end{array}\right\} \xrightarrow{F_1-F_2} \left.\begin{array}{r} 2x+y+3z=7'80 \\ x-z=-0'30 \end{array}\right\}$$

Vemos que el precio de 2 cafés, 1 tostada y 3 zumos de naranja es de 7'80 €

b) Planteamos el sistema con la nueva ecuación que nos dan y lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=7'50 \\ 4x+y+z=7'20 \\ z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+y+4=7'50 \\ 4x+y+2=7'20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+y=3'50 \\ 4x+y=5'20 \end{array}\right\} \xrightarrow{F_2-F_1} x=1'7 \text{ €} \; ; \; y=-1'6 \text{ €}$$

Vemos que no es posible que el precio del zumo de naranja sea de 2 €, ya que el precio de la tostada saldría negativo.

Considera el sistema de ecuaciones: $\left\{\begin{aligned} x+y+2z&=0\\ 3x-y-2z&=0\\ -x+2y+mz&=0\end{aligned}\right.$

a) Calcula m para que el sistema tenga infinitas soluciones y hállalas.
b) Para $m=2$, ¿existe alguna solución tal que $z=1$?. En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.
MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 3. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -2\\ -1 & 2 & m\end{vmatrix}=-m+2+12-2-3m+4=-4m+16=0\Rightarrow m=4$$

Luego, para $m=4$, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

Calculamos las soluciones del sistema $\left\{\begin{aligned} x+y+2z&=0\\ 3x-y-2z&=0\end{aligned}\right.$

$$\left\{\begin{aligned} x+y+2z&=0\\ 3x-y-2z&=0\end{aligned}\right. \xrightarrow{F_2+F_1} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x+y+2z&=0\\ 4x&=0\end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x&=0\\ y&=-2t\\ z&=t\end{aligned}\right.$$

b) Para $m=2$, resolvemos el sistema: $\left\{\begin{aligned} x+y+2z&=0\\ 3x-y-2z&=0\\ -x+2y+2z&=0\end{aligned}\right.$

que es compatible determinado, por lo tanto, sólo tiene la solución trivial $x=y=z=0$.

Por lo tanto, no hay ninguna solución en la que $z=1$

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Estudia, según los valores de λ, el rango de la matriz $A-\lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden tres.

b) Resuelve el sistema $(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **y halla, si existe, una solución en la que** $x=2$

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 4. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A-\lambda I$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante y lo igualamos a cero.

$$|A-\lambda I|=-\lambda^3+8\lambda^2-19\lambda+12=0\Rightarrow\lambda=1\ ;\ \lambda=3\ ;\ \lambda=4$$

Si $\lambda\neq 1\ ;\ \lambda\neq 3\ ;\ \lambda\neq 4\Rightarrow|A-\lambda I|\neq 0\Rightarrow Rango(A-\lambda I)=3$

Si $\lambda=1\Rightarrow(A-I)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow Rango(A-I)=2$

Si $\lambda=3\Rightarrow(A-3I)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow Rango(A-3I)=2$

Si $\lambda=4\Rightarrow(A-4I)=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=4\neq 0\Rightarrow Rango(A-4I)=2$

b) Como el $Rango(A-I)=2$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{aligned} x+2z=0 \\ -x+y+z=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow x=-2t\ ;\ y=-3t\ ;\ z=t$$

Si $x=2\Rightarrow\ 2=-2t\Rightarrow t=-1$, luego, la solución es: $x=2\ ;\ y=3\ ;\ z=-1$

Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.
a) Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta?. Razona la respuesta.
b) Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta?.
MATEMÁTICAS II. 2021. JULIO. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C=70 \\ B=A+C \\ 2(A+C)=70 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B+C=70 \\ A-B+C=0 \\ 2A+2C=70 \end{array}\right\}$$

No podemos, ya que es un sistema compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

b) Planteamos el sistema con la nueva ecuación que nos dan y lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C=70 \\ B=A+C \\ 2C=B-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B+C=70 \\ A-B+C=0 \\ B-2C=5 \end{array}\right\} \Rightarrow A=20\ ;\ B=35\ ;\ C=15$$