EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2021

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 7
- Junio, Ejercicio 8
- Reserva 1, Ejercicio 7
- Reserva 1, Ejercicio 8
- Reserva 2, Ejercicio 7
- Reserva 2, Ejercicio 8
- Reserva 3, Ejercicio 7
- Reserva 3, Ejercicio 8
- Reserva 4, Ejercicio 7
- Reserva 4, Ejercicio 8
- Julio, Ejercicio 7
- Julio, Ejercicio 8

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x-3y+z-2=0 \\ -3x+2y+2z+1=0 \end{cases}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases}$.

a) Calcula el plano perpendicular a la recta *s* que pasa por el punto $P=(1,0,-5)$.

b) Calcula el seno del ángulo que forma la recta *r* con el plano $\pi \equiv -2x+y+2z=0$.

MATEMÁTICAS II. 2021. JUNIO. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) El plano tiene como vector normal el vector director de la recta $(-2,1,2)$, luego, su ecuación será:

$$-2x+y+2z+D=0$$

y, como debe pasar por el punto $P=(1,0,-5)$, se debe cumplir:

$$-2\cdot 1+0+2\cdot(-5)+D=0 \Rightarrow D=12$$

Por lo tanto, el plano pedido tendrá de ecuación: $-2x+y+2z+12=0$

b) Calculamos el vector director de la recta r

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}-9\vec{k}-4\vec{j}-2\vec{i} = -8\vec{i}-7\vec{j}-5\vec{k}$$

Aplicamos la fórmula del ángulo de recta y plano.

$$sen\,\alpha = \frac{|u_1\cdot A+u_2\cdot B+u_3\cdot C|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|-8\cdot(-2)-7\cdot 1-5\cdot 2|}{\sqrt{(-8)^2+(-7)^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1242}} = 0'0283$$

La recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$ y la recta *s*, que pasa por los puntos $P(1,0,2)$ y $Q(a,1,0)$, se cortan en un punto. Calcula el valor de *a* y el punto de corte.
MATEMÁTICAS II. 2021. JUNIO. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la recta *s* en paramétricas: $\overrightarrow{PQ} = (a-1,1,-2) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1+(a-1)t \\ y = t \\ z = 2-2t \end{cases}$

Si las rectas se cortan, cualquier punto $(1+(a-1)t, t, 2-2t)$ de la recta *s* tiene que verificar la ecuación de la recta *r*, luego:

$$\frac{1+(a-1)t+3}{2} = \frac{t+4}{2} = \frac{2-2t-3}{3} \Rightarrow \begin{cases} 1+(a-1)t+3 = t+4 \\ 3t+12 = 4-4t-6 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \ ; \ t = -2$$

Luego para $a = 2$, las rectas se cortan.

El punto de corte será: $(1+(a-1)t, t, 2-2t) = (-1,-2,6)$

Considera el punto $P=(1,2,6)$ y el plano $\pi \equiv 2x-y+z=0$

a) Halla las ecuaciones de los planos paralelos a π cuya distancia a éste sea $\sqrt{6}$ unidades.

b) Halla el simétrico del punto P respecto al plano π.

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 1. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

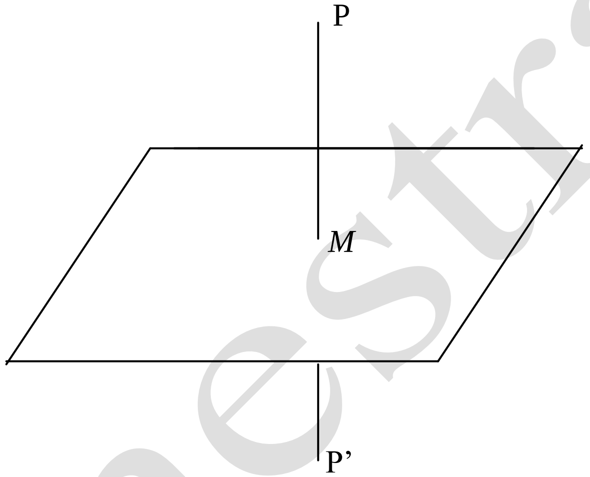
a) Los planos paralelos a π tienen de ecuación: $2x-y+z+D=0$

Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano, eligiendo un punto del plano π, por ejemplo, $A(0,1,1)$

$$\frac{|2\cdot 0-1\cdot 1+1\cdot 1+D|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{|D|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\Rightarrow |D|=6\Rightarrow \begin{cases} D=6 \\ -D=6\Rightarrow D=-6 \end{cases}$$

Luego, los planos son: $2x-y+z+6=0$ y $2x-y+z-6=0$

b)



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto P es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(2,-1,1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=6+t \end{cases}$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $2\cdot(1+2t)-(2-t)+(6+t)=0\Rightarrow t=-1$

Luego, las coordenadas del punto M son: $x=-1; y=3; z=5$

Como el punto M es el punto medio del segmento P P', si llamamos (a,b,c) a las coordenadas del punto P', se debe verificar que:

$$\frac{a+1}{2}=-1\Rightarrow a=-3;\ \frac{b+2}{2}=3\Rightarrow b=4;\ \frac{c+6}{2}=5\Rightarrow c=4$$

Luego, el punto simétrico es el $P'(-3,4,4)$

Considera los puntos $B(-1,0,-1)$, $C(0,1,-3)$ y la recta *r* dada por $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}$ **.**

a) Calcula un punto que esté en *r* y equidiste de *B* y *C*.
b) Siendo $D(1,-1,-2)$, calcula el área del triángulo con vértices en los puntos *B*,*C* y *D*.
MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 1. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Un punto genérico de la recta es $A(-\lambda,1+2\lambda,-1+\lambda)$

Calculamos los vectores: $\vec{AB} = (-1+\lambda,-1-2\lambda,-\lambda)$; $\vec{AC} = (\lambda,-2\lambda,-2-\lambda)$

Como la distancia es la misma, entonces:

$$\left|\vec{AB}\right| = \left|\vec{AC}\right| \Rightarrow \sqrt{(-1+\lambda)^2+(-1-2\lambda)^2+(-\lambda)^2} = \sqrt{\lambda^2+(-2\lambda)^2+(-2-\lambda)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1+\lambda^2-2\lambda+1+4\lambda^2+4\lambda+\lambda^2 = \lambda^2+4\lambda^2+4+\lambda^2+4\lambda \Rightarrow 2\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=-1$$

Luego, el punto *A* es: $A = (-\lambda,1+2\lambda,-1+\lambda) = (1,-1,-2)$

b) Calculamos los vectores: $\vec{DB} = (-2,1,1)$; $\vec{DC} = (-1,2,-1)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

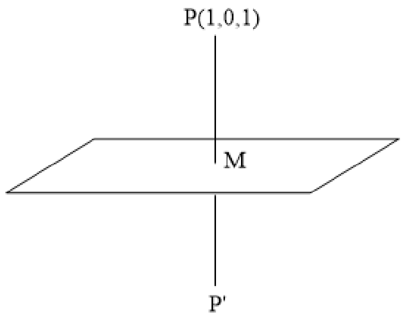
$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{DB} \wedge \vec{DC}\right| =$$

$$= \frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo}(-3,-3,-3) = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+(-3)^2} = \frac{\sqrt{27}}{2} = 2'598\ u^2$$

Considera el punto $P(1,0,1)$ y el plano $\pi \equiv x - y + z + 1 = 0$
a) Halla el simétrico del punto P respecto al plano π.
b) Halla la distancia del punto P al plano π.
MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 2. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a)



Con el vector normal del plano $\vec{n} = (1,-1,1)$ y el punto *P*, calculamos la recta que pasa por *P* y es perpendicular al plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Calculamos el punto *M*, punto de corte de la recta con el plano

$$1 \cdot (1+t) - 1 \cdot (-t) + 1 \cdot (1+t) + 1 = 0 \Rightarrow 3t + 3 = 0 \Rightarrow t = -1$$

Luego, el punto *M* es: $M = (1-1, -(-1), 1-1) = (0,1,0)$

Calculamos las coordenadas del simétrico

$$M = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow (0,1,0) = \frac{(1,0,1) + (a,b,c)}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 1 + a \Rightarrow a = -1 \\ 2 = 0 + b \Rightarrow b = 2 \\ 0 = 1 + c \Rightarrow c = -1 \end{cases}$$

Luego, el punto simétrico es $P'(-1,2,-1)$

b) La distancia es el módulo del vector $\overrightarrow{PM} = (-1,1,-1)$

$$d(P,\pi) = \left| \overrightarrow{PM} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3} = 1'73\ u$$

Considera las rectas $r \equiv \dfrac{x-2}{-2} = y-1 = \dfrac{z}{-2}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x+2y=3 \\ 2y+z=2 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de *r* y s.
b) Calcula, si es posible, el plano que contiene a *r* y *s*.
MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 2. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos las dos rectas a paramétricas

$$r \equiv \frac{x-2}{-2} = y-1 = \frac{z}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 1+t \\ z = -2t \end{cases} \Rightarrow A(2,1,0)\ ;\ \vec{u} = (-2,1,-2)$$

$$s \equiv \begin{cases} x+2y=3 \\ 2y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3-2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2-2\lambda \end{cases} \Rightarrow B = (3,0,2)\ ;\ \vec{v} = (-2,1,-2)$$

Las rectas son paralelas, ya que tienen el mismo vector director. Vamos a ver si son coincidentes

Vemos que el punto $A(2,1,0)$ de la recta r no pertenece a la recta s ya que:

$$s \equiv \begin{cases} x+2y=3 \\ 2y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+2 \neq 3 \\ 2+0=2 \end{cases}$$

Luego, las rectas son paralelas

b) El plano viene determinado por el punto A y los vectores $\vec{u} = (-2,1,-2)$ y $\overrightarrow{AB} = (1,-1,2)$, luego:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 & 1 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2y+z-2=0$$

Considera las rectas $r \equiv \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x-y+z=2 \\ 3x-y-z=-4 \end{cases}$

Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas *r* y *s*, calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 3. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

Las rectas *r* y *s*, serán paralelas, luego si calculamos la distancia de un punto de la recta *r* a la recta *s* tendremos el lado del cuadrado.

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow A=(0,-2,1)\ ;\ \vec{u}=(1,2,1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x-y+z=2 \\ 3x-y-z=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3+t \\ y=-5+2t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow B=(-3,-5,0)\ ;\ \vec{v}=(1,2,1)$$

Calculamos el vector que va desde el punto *A* a un punto genérico $B=(-3+t,-5+2t,t)$ de la recta s: $\vec{AB}=(-3+t,-3+2t,t-1)$. Este vector tiene que ser perpendicular al vector $\vec{v}=(1,2,1)$, luego:

$$\vec{AB}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow -3+t-6+4t+t-1=0 \Rightarrow t=\frac{5}{3}$$

El lado del cuadrado será el módulo del vector $\vec{AB}$

$$\vec{AB}=(-3+t,-3+2t,t-1)=\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \left|\vec{AB}\right|=\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{3}}$$

Luego, el área del cuadrado será: $Área=l^2=\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2=\frac{7}{3}\,u^2=2'33\,u^2$

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 2+m\lambda \end{cases}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x + z = 2 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de ***r*** **y** ***s*** **según los valores de** ***m*****.**
b) Para $m = 1$**, calcula el coseno del ángulo que forman las rectas** ***r*** **y** ***s***
MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 3. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 2+m\lambda \end{cases} \Rightarrow A = (1,1,2) \ ; \ \vec{u} = (1,1,m)$$

$$s \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow B = (2,-1,0) \ ; \ \vec{v} = (-1,1,1)$$

Calculamos el rango de la matriz formada por los vectores $\vec{u} = (1,1,m)$; $\vec{v} = (-1,1,1)$ y $\overrightarrow{AB} = (1,-2,-2)$ según los valores de m

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2+1+2m-m-2+2 = m-1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

Si $m \neq 1 \Rightarrow Rango = 3 \Rightarrow$ Rectas que se cruzan

Si $m = 1 \Rightarrow Rango = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ Rectas secantes

b) Los vectores directores de las rectas son: $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (-1,1,1)$, luego:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{-1+1+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3} = 0'333$$

Considera las rectas $r\equiv\begin{cases}x=2+3\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=3+\lambda\end{cases}$ **y** $s\equiv\begin{cases}2x-y-2=0\\ y+2z-4=0\end{cases}$

a) Halla el plano que contiene a *r* y es paralelo a *s*.
b) Deduce razonadamente que ningún plano perpendicular a *s* contiene a *r*.
MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 4. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y vector director de cada recta

$$r\equiv\begin{cases}x=2+3\lambda\\ y=-1+2\lambda\Rightarrow A=(2,-1,3)\ ;\ \vec{u}=(3,2,1)\\ z=3+\lambda\end{cases}$$

$$s\equiv\begin{cases}2x-y-2=0\\ y+2z-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}t\\ y=t\\ z=2-\frac{1}{2}t\end{cases}\Rightarrow B=(1,0,2)\ ;\ \vec{v}=\left(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)=(1,2,-1)$$

El plano que nos piden viene definido por: $A=(2,-1,3)\ ;\ \vec{u}=(3,2,1)$ y $\vec{v}=(1,2,-1)$, luego:

$$\begin{vmatrix}x-2 & 3 & 1\\ y+1 & 2 & 2\\ z-3 & 1 & -1\end{vmatrix}=-2x+4+6z-18+y+1-2z+6+3y+3-2x+4=-4x+4y+4z=0\Rightarrow x-y-z=0$$

b) Si el plano es perpendicular a *s*, su vector normal tiene que ser proporcional a $\vec{v}=\left(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)=(1,2,-1)$ y si ese plano contiene a *r*, los vectores $\vec{u}=(3,2,1)$ y $\vec{v}=(1,2,-1)$ tendrían que ser perpendiculares, pero:

$$(3,2,1)\cdot(1,2,-1)=3+4-1=6\neq 0$$

Luego, no hay ningún plano perpendicular a s y que contenga a r

Considera los puntos $A(1,2,3)$; $B(-2,4,-3)$; $C(-10,1,0)$.
a) Halla el área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C*.
b) Halla el plano que equidista de *A* y *B*.
MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 4. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores: $\vec{AB}=(-3,2,-6)$; $\vec{AC}=(-11,-1,-3)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

$$S=\frac{1}{2}\,|\vec{AB}\wedge\vec{AC}|=$$

$$=\frac{1}{2}\ \textit{módulo}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 2 & -6\\ -11 & -1 & -3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\ \textit{módulo}\ (-12,57,25)=\frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2+57^2+25^2}=31'69\ u^2$$

b) El plano que equidista de *A* y *B* es un plano perpendicular al segmento *AB* y que pasa por su punto medio.

Calculamos el punto medio $M=\dfrac{(1,2,3)+(-2,4,-3)}{2}=\left(-\dfrac{1}{2},3,0\right)$

El vector normal del plano es el vector $\vec{AB}=(-3,2,-6)$

Luego el plano perpendicular es: $-3x+2y-6z+D=0$ y como tiene que pasar por el punto $M=\left(-\dfrac{1}{2},3,0\right)$, será:

$$-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot 3-6\cdot 0+D=0\Rightarrow D=-\frac{15}{2}\Rightarrow -3x+2y-6z-\frac{15}{2}=0\Rightarrow -6x+4y-12z-15=0$$

La recta perpendicular desde el punto $A(1,1,0)$ a un cierto plano π corta a éste en el punto $B\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

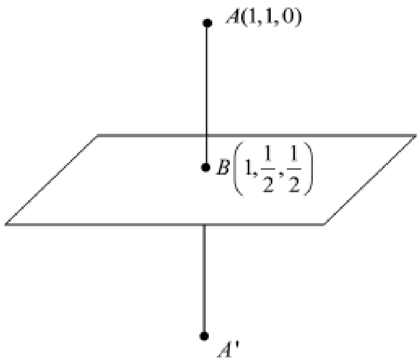
a) Calcula la ecuación del plano π .

b) Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π .

MATEMÁTICAS II. 2021. JULIO. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a)



El vector normal del plano es el vector $\overrightarrow{AB}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ y tiene que pasar por el punto $B=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, luego:

$$-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+D=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0 \Rightarrow -y+z=0$$

b) La distancia que nos piden es:

$$d_{AA'}=2\cdot d_{AB}=2\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\cdot\sqrt{0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\ u$$

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 1 \\ z = -3-\lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de *r* y *s*.
b) Halla la recta que corta perpendicularmente a *r* y a *s*.
MATEMÁTICAS II. 2021. JULIO. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 1 \\ z = -3-\lambda \end{cases} \Rightarrow A = (3,1,-3) \; ; \; \vec{u} = (1,0,-1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B = (1,0,0) \; ; \; \vec{v} = (-1,1,0)$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (-2,-1,3)$ y averiguamos el rango de la matriz formada por los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3-1-2 = 0 \Rightarrow Rango(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 2 \Rightarrow \text{ Las rectas son secantes.}$$

b) Calculamos el punto de corte de las dos rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 1 \\ z = -3-\lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

Igualando tenemos que:

$$\left. \begin{array}{r} 3+\lambda = 1-t \\ 1 = t \\ -3-\lambda = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t = 1 \; ; \; \lambda = -3 \Rightarrow \text{Punto de corte: } (0,1,0)$$

Calculamos el vector director de la recta que es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (1,1,1)$$

Luego, la recta es: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$