EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2021

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1
- Junio, Ejercicio 2
- Reserva 1, Ejercicio 1
- Reserva 1, Ejercicio 2
- Reserva 2, Ejercicio 1
- Reserva 2, Ejercicio 2
- Reserva 3, Ejercicio 1
- Reserva 3, Ejercicio 2
- Reserva 4, Ejercicio 1
- Reserva 4, Ejercicio 2
- Julio, Ejercicio 1
- Julio, Ejercicio 2

Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+2}{x-1}$ (para $x\neq 1$) tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(1,1)$ y tiene pendiente 2. Calcula a y b.
MATEMÁTICAS II. 2021. JUNIO. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

La asíntota oblicua tiene de ecuación $y=mx+n$. Como es una función racional podemos calcular la asíntota oblicua dividiendo los dos polinomios

Dividiendo los dos polinomios, tenemos que:

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{ax^2}+bx+2 & x-1 \\ \hline
\cancel{-ax^2}+ax & ax+(a+b) \\ \cline{1-1}
\quad \cancel{(a+b)x}+2 & \\
\quad \cancel{-(a+b)x}+a+b & \\ \cline{1-1}
\qquad 2+a+b &
\end{array}
$$

Luego, la asíntota oblicua tiene de ecuación: $y=ax+a+b$

Como la pendiente es $2\Rightarrow a=2$

Como nos dicen que pasa por el punto $(1,1)\Rightarrow 1=2\cdot 1+2+b\Rightarrow b=-3$

Luego: $a=2$; $b=-3$

Considera la función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}(3x-6)\cdot e^{x} & si \quad x\le 0\\ \dfrac{36(sen(x)-ax)}{x^3} & si \quad x>0\end{cases}$.

a) Calcula *a*.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-1$.

MATEMÁTICAS II. 2021. JUNIO. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) Como la función es continua en $\mathbb{R}\Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$. Por lo tanto:

$f(0)=-6\cdot e^{0}=-6$

$\lim_{x\to 0^-}(3x-6)\cdot e^{x}=-6\cdot e^{0}=-6$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{36(sen(x)-ax)}{x^3}=\frac{0}{0}\xrightarrow{L'H\hat{o}pital}\lim_{x\to 0^+}\frac{36(\cos(x)-a)}{3x^2}=\frac{36(1-a)}{0}$$

Como la función es continua, el límite tiene que existir y ser finito, luego: $36(1-a)=0\Rightarrow a=1$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{36(sen(x)-ax)}{x^3}=\frac{0}{0}\xrightarrow{L'H\hat{o}pital}\lim_{x\to 0^+}\frac{36(\cos(x)-1)}{3x^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{L'H\hat{o}pital}\lim_{x\to 0^+}\frac{36(-sen(x))}{6x}=\frac{0}{0}$$
$$\xrightarrow{L'H\hat{o}pital}\lim_{x\to 0^+}\frac{36(-\cos(x))}{6}=\frac{-36}{6}=-6$$

b) Calculamos la recta tangente en $x=-1$: $y-f(-1)=f'(-1)\cdot(x+1)$

- $f(-1)=(-3-6)\cdot e^{-1}=-9\cdot e^{-1}=-\dfrac{9}{e}$

- $f'(x)=3\cdot e^{x}+(3x-6)\cdot e^{x}=(3x-3)\cdot e^{x}\Rightarrow f'(-1)=-6\cdot e^{-1}=-\dfrac{6}{e}$

Sustituyendo, tenemos que: $y+\dfrac{9}{e}=-\dfrac{6}{e}\cdot(x+1)\Rightarrow y=\dfrac{-6x-15}{e}$

Calcula a, b, c y d sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tiene un punto de inflexión en $(0,4)$ y su recta normal en el punto $(1,8)$ es paralela al eje de ordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 1. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

La función será: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \ ; \ f''(x)=6ax+2b$$

- El punto (0,4) es un punto de inflexión de la gráfica de f

$$\Rightarrow \begin{cases} Pasa\ por\ (0,4)\Rightarrow a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=4\Rightarrow d=4 \\ f''(0)=0\Rightarrow 6a\cdot 0+2b=0\Rightarrow 2b=0\Rightarrow b=0 \end{cases}$$

- La recta normal tiene de ecuación: $y-f(1)=-\dfrac{1}{f'(1)}(x-1)\Rightarrow y-8=-\dfrac{1}{f'(1)}(x-1)$

Y como es paralela al eje de ordenadas $\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c=0\Rightarrow 3a+c=0$

- Además, sabemos que pasa por $(1,8)\Rightarrow a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d=8\Rightarrow a+c+4=8\Rightarrow a+c=4$

Resolviendo el sistema formado por: $\left.\begin{array}{r} 3a+c=0 \\ a+c=4 \end{array}\right\}\Rightarrow a=-2\ ;\ c=6$

Luego: $a=-2$; $b=0$; $c=6$; $d=4\Rightarrow f(x)=-2x^3+6x+4$

Considera la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2-10}{x^2+2x-3}$ para $(x\neq -3\ ,\ x\neq 1)$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 1. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R}-\{-3,1\}$.

Asíntotas Verticales: En principio son las rectas $x=-3$ y $x=1$. Vamos a comprobarlo

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{x^2-10}{x^2+2x-3}=\frac{-1}{0^+}=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to -3^+}\frac{x^2-10}{x^2+2x-3}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

Luego $x=-3$ es una asíntota vertical

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-10}{x^2+2x-3}=\frac{-9}{0^-}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-10}{x^2+2x-3}=\frac{-9}{0^+}=-\infty$$

Luego $x=1$ es una asíntota vertical

Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-10}{x^2+2x-3}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{2x+2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{2}=1\Rightarrow y=1$$

Luego $y=1$ es una asíntota horizontal.

Asíntota Oblicua: No tiene, ya que tiene asíntota horizontal

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y'=\dfrac{2x^2+14x+20}{(x^2+2x-3)^2}=0\Rightarrow x=-2\ ;\ x=-5$

	$(-\infty,-5)$	$(-5,-3)$	$(-3,-2)$	$(-2,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	−	−	+	+
Función	C	D	D	C	C

Creciente: $(-\infty,-5)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$

Decreciente: $(-5,-3)\cup(-3,-2)$

Máximo en $\left(-5,\dfrac{5}{4}\right)$ y mínimo en $(-2,2)$

Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{\ln(x+1)}-\frac{a}{x}\right)$ es finito, calcula a y el valor del límite (ln denota el logaritmo neperiano).
MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 2. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{\ln(x+1)}-\frac{a}{x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x-a\cdot\ln(x+1)}{x\cdot\ln(x+1)}\right)=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+1-\frac{a}{x+1}}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}=\frac{1-a}{0}$$

Como nos dicen que el límite existe y es finito, el numerador debe de ser igual a cero para poder seguir aplicando la regla de L'Hôpital, luego: $1-a=0\Rightarrow a=1$.

Calculamos el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+1-\frac{1}{x+1}}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2+\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}}=\frac{2+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{a-x}$ (para $x\neq a$).
a) Halla a y b sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(2,3)$ y tiene una asíntota oblicua cuya pendiente vale -4.
b) Para $a=2$ y $b=3$, calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$
MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 2. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) La asíntota oblicua tiene de ecuación $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{x\cdot(a-x)}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{a-2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2a}{-2}=-a=-4\Rightarrow a=4$$

$$f(2)=3\Rightarrow\frac{4\cdot 2^2+b}{4-2}=3\Rightarrow 16+b=6\Rightarrow b=-10$$

b) Calculamos $f(1)$ y $f'(1)$

$$f(x)=\frac{2x^2+3}{2-x}\Rightarrow f(1)=\frac{2+3}{2-1}=5$$

$$f(x)=\frac{2x^2+3}{2-x}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x\cdot(2-x)+1(2x^2+3)}{(2-x)^2}=\frac{-2x^2+8x+3}{(2-x)^2}\Rightarrow f'(1)=\frac{-2+8+3}{(2-1)^2}=9$$

Sustituyendo, tenemos que:

La ecuación de la tangente es: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-5=9(x-1)\Rightarrow y=9x-4$

La ecuación de la normal es: $y-f(1)=-\dfrac{1}{f'(1)}\cdot(x-1)\Rightarrow y-5=-\dfrac{1}{9}(x-1)\Rightarrow y=-\dfrac{x}{9}+\dfrac{46}{9}$

Sea la función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+b}{x-1} & si \quad x\le 0\\ \ln(1+x) & si \quad x>0\end{cases}$

(ln denota la función logaritmo neperiano)

a) Determina *a* y *b*.

b) Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$.

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 3. EJERCICIO 1.

R E S O L U C I Ó N

a) La función es derivable, luego, tiene que ser continua.

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\frac{ax+b}{x-1}=-b\\ \lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow -b=0\Rightarrow b=0$$

Calculamos $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{a\cdot(x-1)-(ax+b)}{(x-1)^2}=\dfrac{-a-b}{(x-1)^2}=\dfrac{-a}{(x-1)^2} & si \quad x\le 0\\ \dfrac{1}{1+x} & si \quad x>0\end{cases}$

Como es derivable se cumple que: $f'(0^-)=f'(0^+)\Rightarrow -a=1\Rightarrow a=-1$

b) Calculamos $f(2)$ y $f'(2)$

$$f(2)=\ln 3$$
$$f'(2)=\frac{1}{3}$$

La ecuación de la recta tangente en $x=2$ es $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)\Rightarrow y-\ln 3=\frac{1}{3}(x-2)$

La ecuación de la recta normal en $x=2$ es $y-f(2)=-\dfrac{1}{f'(2)}\cdot(x-2)\Rightarrow y-\ln 3=-3\cdot(x-2)$

Halla *a*, *b* y *c* sabiendo que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=a+b\cdot sen(x)+c\cdot sen(2x)$ tiene un punto crítico en el punto de abscisa $x=\pi$ y la recta $y=-\frac{1}{2}x+3$ es normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 3. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Calculamos su derivada primera: $f'(x)=b\cdot\cos x+2c\cdot\cos 2x$

- Punto de crítico en $x=\pi\Rightarrow f'(\pi)=0\Rightarrow b\cdot\cos\pi+2c\cdot\cos 2\pi=0\Rightarrow -b+2c=0$

- La recta normal en $x=0$ es: $y-f(0)=-\frac{1}{f'(0)}(x-0)$

  - $f(0)=a+b\cdot sen(0)+c\cdot sen(0)=a$
  - $f'(0)=b\cdot\cos 0+2c\cdot\cos 0=b+2c$

Sustituyendo e igualando a la ecuación normal que nos dan, tenemos que:

$$y-a=-\frac{1}{b+2c}(x-0)=-\frac{1}{b+2c}x\Rightarrow y=-\frac{1}{b+2c}x+a=-\frac{1}{2}x+3\Rightarrow\begin{cases}b+2c=2\\a=3\end{cases}$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones obtenidas

$$\left.\begin{array}{r}-b+2c=0\\b+2c=2\\a=3\end{array}\right\}\Rightarrow a=3\ ;\ b=1\ ;\ c=\frac{1}{2}$$

Sea la función continua $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(e^{x}+x^{3})}{x} & si \quad x<0\\ 4x^{2}+a & si \quad 0\le x<1\\ b+sen(\pi x) & si \quad 1\le x\end{cases}$.

(ln denota la función logaritmo neperiano). Determina *a* y *b*.
MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 4. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

Como la función es continua en $\mathbb{R}$, tiene que ser continua en $x=0$ y $x=1$.

Estudiamos la continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{\ln(e^{x}+x^{3})}{x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{\dfrac{e^{x}+3x^{2}}{e^{x}+x^{3}}}{1}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^{+}}4x^{2}+a=a\end{array}\right\}\Rightarrow a=1$$

Estudiamos la continuidad en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^{-}}4x^{2}+a=4+a=5\\ \lim\limits_{x\to 1^{+}}b+sen(\pi x)=b+sen\,\pi=b\end{array}\right\}\Rightarrow b=5$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$
a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 4. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el dominio de la función.

$$e^{2x}+1=0\Rightarrow e^{2x}=-1\Rightarrow \text{ No tiene solución, luego el dominio es } \mathbb{R}$$

Asíntota vertical: No tiene, ya que el dominio es $\mathbb{R}$.

Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{2x}}{2e^{2x}}=1\Rightarrow y=1$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{e^{-\infty}-1}{e^{-\infty}+1}=\frac{-1}{1}=-1\Rightarrow y=-1$$

Luego, $y=1$ es una asíntota horizontal cuando $x\to+\infty$ y $y=-1$ es una asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

Asíntota oblicua: No tiene, ya que tiene asíntota horizontal.

b) Calculamos la derivada y la igualamos a 0

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}=0\Rightarrow \text{ No tiene solución}$$

Como $f'(x)>0$ para cualquier valor de *x*, la función es creciente en $\mathbb{R}$.

Calcula *a* y *b* sabiendo que $\lim_{x \to 0} \frac{a(1-\cos(x))+b\,sen(x)-2(e^x-1)}{x^2}=7$

MATEMÁTICAS II. 2021. JULIO. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \to 0} \frac{a(1-\cos(x))+b\,sen(x)-2(e^x-1)}{x^2}=\frac{0}{0} \Rightarrow \text{Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a\cdot sen(x)+b\cos(x)-2e^x}{2x}=\frac{b-2}{0} \Rightarrow$$

Como el límite es finito, entonces, $b-2=0 \Rightarrow b=2$ y podemos seguir aplicando la regla de L'Hopital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{a\cdot sen(x)+2\cos(x)-2e^x}{2x}=\frac{0}{0} \Rightarrow \text{Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a\cdot \cos(x)-2\,sen(x)-2e^x}{2}=\frac{a-2}{2}=7 \Rightarrow a=16$$

Luego, los valores son: $a=16$; $b=2$

Halla $a>0$ y $b>0$ sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\dfrac{bx^2}{1+ax^4}$ tiene en el punto $(1,2)$ un punto crítico.
MATEMÁTICAS II. 2021. JULIO. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera derivada

$$f'(x)=\frac{2bx(1+ax^4)-bx^2(4ax^3)}{(1+ax^4)^2}=\frac{2bx-2abx^5}{(1+ax^4)^2}$$

Como tiene un punto crítico en $(1,2)$, tenemos que:

$$f'(1)=0\Rightarrow\frac{2b-2ab}{(1+a)^2}=0\Rightarrow 2b-2ab=0\Rightarrow 2b(1-a)=0\Rightarrow\begin{cases}2b=0\Rightarrow b=0\Rightarrow \textit{No sirve}\\ 1-a=0\Rightarrow a=1\end{cases}$$

$$f(1)=2\Rightarrow\frac{b\cdot 1^2}{1+1\cdot 1^4}=2\Rightarrow b=4$$

Luego, $a=1$ y $b=4$