

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 3
- Junio, Ejercicio 4
- Reserva 1, Ejercicio 3
- Reserva 1, Ejercicio 4
- Reserva 2, Ejercicio 3
- Reserva 2, Ejercicio 4
- Reserva 3, Ejercicio 3
- Reserva 3, Ejercicio 4
- Reserva 4, Ejercicio 3
- Reserva 4, Ejercicio 4
- Julio, Ejercicio 3
- Julio, Ejercicio 4

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x^3 - x^4$

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

b) Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas.

MATEMÁTICAS II. 2021. JUNIO. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 0 \Rightarrow x^2(12 - 4x) = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 3$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
Signo $f'(x)$	+	+	-
Función	C	C	D

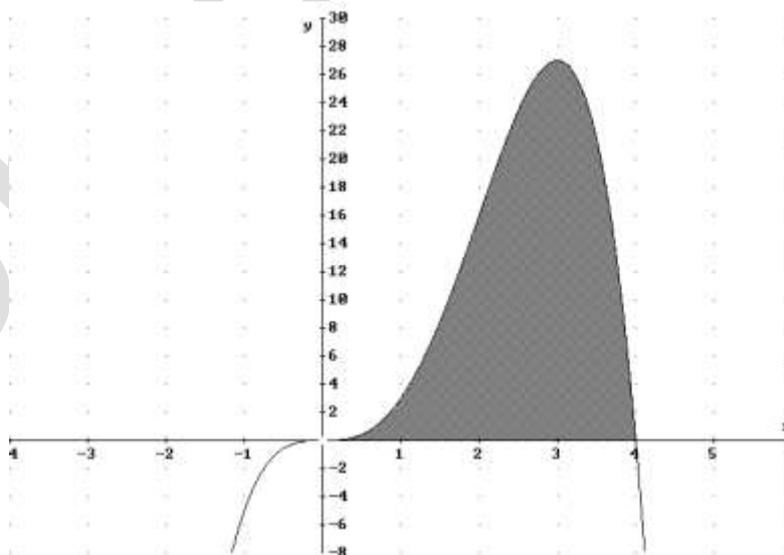
La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$. Decreciente en $(3, \infty)$.

Tiene un máximo relativo en $(3, 27)$

b) Calculamos lo punto de corte con los ejes

Corte con el eje X $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 4x^3 - x^4 = 0 \Rightarrow x^3(4 - x) = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 4 \Rightarrow (0, 0)$ y $(4, 0)$

Corte con el eje Y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0)$



El área de la región pedida es:

$$A = \int_0^4 (4x^3 - x^4) dx = \left[x^4 - \frac{x^5}{5} \right]_0^4 = \left(256 - \frac{1024}{5} \right) - (0) = \frac{256}{5} u^2$$

Considera la función $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2021. JUNIO. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

La ecuación de la recta tangente es: $y - F(1) = F'(1) \cdot (x - 1)$

Calculamos:

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt = \left[t^2 + \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^x = x^2 + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} \Rightarrow F(1) = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$$

$$F'(x) = 2x + \sqrt{x} \Rightarrow F'(1) = 2 + 1 = 3$$

Luego, sustituyendo, tenemos que:

$$y - \frac{7}{3} = 3 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 3x - \frac{4}{3}$$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$

a) Calcula a para que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , la recta tangente a la misma en el punto $(1, f(1))$ y el eje de ordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 1. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x = a$ es $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$

$$f(a) = e^a$$

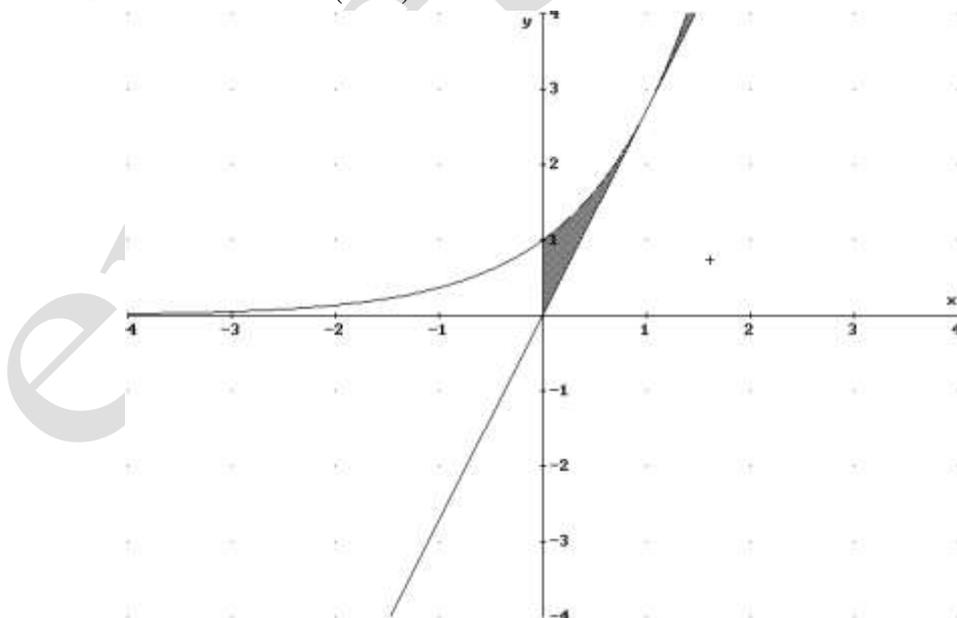
$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(a) = e^a$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - e^a = e^a \cdot (x - a)$

Como pasa por el origen de coordenadas, tenemos que:

$$0 - e^a = e^a \cdot (0 - a) \Rightarrow -e^a = -a \cdot e^a \Rightarrow a = \frac{-e^a}{-e^a} = 1$$

b) La recta tangente es: $y - e = e \cdot (x - 1) \Rightarrow y = e \cdot x$



Calculamos el área

$$\int_0^1 (e^x - e \cdot x) dx = \left[e^x - e \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left(e - \frac{1}{2}e \right) - (1 - 0) = \frac{e}{2} - 1 = 0'359 u^2$$

Calcula $\int_1^3 |x^2 - 3x + 2| dx$

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 1. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Abrimos la función: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1; x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 3x - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 |x^2 - 3x + 2| dx &= \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx + \int_2^3 (x^2 - 3x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x \right]_2^3 = \\ &= \left(-\frac{2^3}{3} + 3\frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 \right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 3\frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1 \right) + \left(\frac{3^3}{3} - 3\frac{3^2}{2} + 2 \cdot 3 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 3\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 \right) = \\ &= -\frac{8}{3} + 6 - 4 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 + 9 - \frac{27}{2} + 6 - \frac{8}{3} + 6 - 4 = 1 \end{aligned}$$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + |x-1|$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

c) Calcula $\int_0^2 f(x) dx$

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 2. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

a) Abrimos la función: $f(x) = x^2 + |x-1| = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Calculamos la derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{No sirve, porque no está en su dominio}$$

	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$(1, \infty)$
Signo y'	-	+	+
Función	D	C	C

La función es creciente en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

Tiene un mínimo en $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

b) Calculamos la integral que nos piden.

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 (x^2 - x + 1) dx + \int_1^2 (x^2 + x - 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) - 0 + \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{2} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{11}{3} \end{aligned}$$

Considera la función $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot e^x$

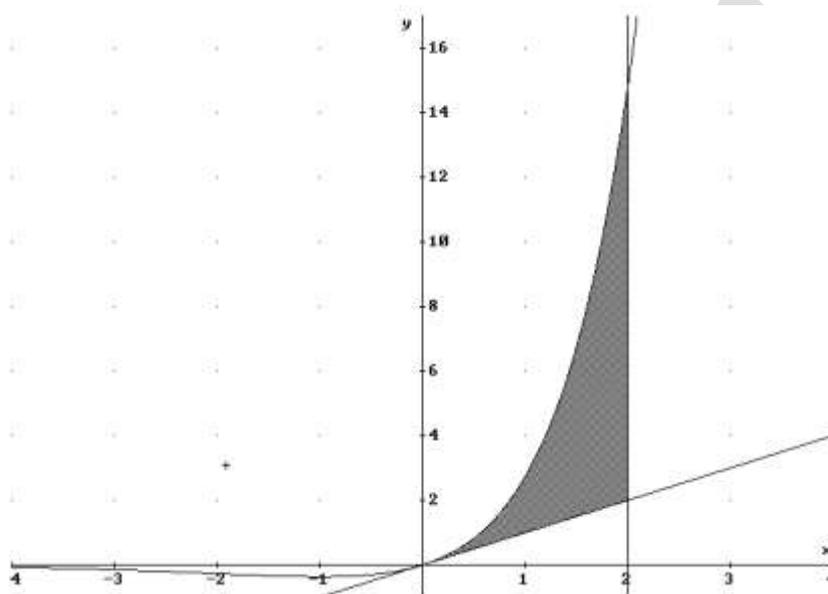
a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y las rectas $x = 2$, $y = x$

b) Determina el área del recinto anterior.

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 2. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

a)



b) Hacemos por partes la integral

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C + C$$

$$u = x ; du = dx$$

$$dv = e^x dx ; v = e^x$$

Calculamos el área que nos piden:

$$A = \int_0^2 (x \cdot e^x - x) dx = \left[x \cdot e^x - e^x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \left(2 \cdot e^2 - e^2 - \frac{4}{2} \right) - (0 - e^0 - 0) = e^2 - 1$$

Considera la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (\ln(x))^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f , así como sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

c) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función f y las rectas $y = 0$; $x = 1$; $x = e$

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 3. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

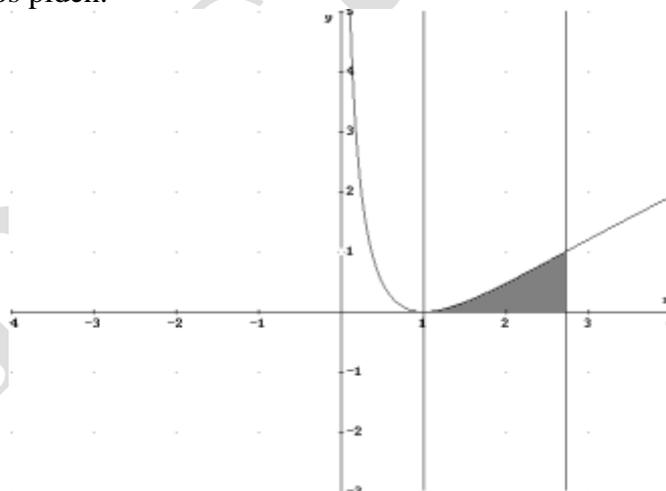
a) Calculamos la derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x} = 0 \Rightarrow 2 \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1$$

	(0,1)	(1,∞)
Signo y'	-	+
Función	D	C

La función es creciente en $(1, +\infty)$ y decreciente en $(0,1)$. Tiene un mínimo en $(1,0)$

b) Calculamos el área que nos piden.



$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx = x(\ln x)^2 - 2 \left(x \ln x - \int dx \right) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

$$u = (\ln x)^2; du = \frac{2 \ln x}{x} dx$$

$$dv = dx; v = x$$

$$u = \ln x; du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx; v = x$$

$$A = \int_1^e (\ln x)^2 dx = \left[x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x \right]_1^e = (e - 2e + 2e) - (0 - 0 + 2) = e - 2$$

Calcula $\int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{e^x}} dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \sqrt{e^x}$).

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 3. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned}\sqrt{e^x} = t &\Rightarrow e^x = t^2 \\ e^x dx &= 2t dt\end{aligned}$$

Calculamos los nuevos límites de integración: $x=0 \Rightarrow t=1$
 $x=2 \Rightarrow t=e$

Con lo cual:

$$I = \int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{e^x}} dx = \int_1^e \frac{1}{1+t} \cdot \frac{2t dt}{t^2} = 2 \int_1^e \left(\frac{1}{t(1+t)} \right) dt$$

Descomponemos la integral racional

$$\frac{1}{t \cdot (1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A \cdot (1+t) + B \cdot t}{t \cdot (1+t)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo, luego:

$$\begin{aligned}t=0 &\Rightarrow 1=A \\ t=-1 &\Rightarrow 1=-B \Rightarrow B=-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I &= 2 \int_1^e \left(\frac{1}{t(1+t)} \right) dt = 2 \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2 [\ln t - \ln(t+1)]_1^e = 2 [(\ln e - \ln(e+1)) - (\ln 1 - \ln 2)] = \\ &= 2 - 2 \ln(e+1) + 2 \ln 2\end{aligned}$$

Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x)) dx$

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 4. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

Sabemos que: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x)) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\operatorname{sen}^2(x) - 1 + \operatorname{sen}^2(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\operatorname{sen}^2(x) - 1) dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - 1 \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{3\cos 2x}{2} \right) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{3\operatorname{sen} 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) - (0 - 0) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x| - 2$ y $g(x) = 4 - x^2$.

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que delimitan.

b) Determina el área del recinto anterior.

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 4. EJERCICIO 4

RESOLUCIÓN

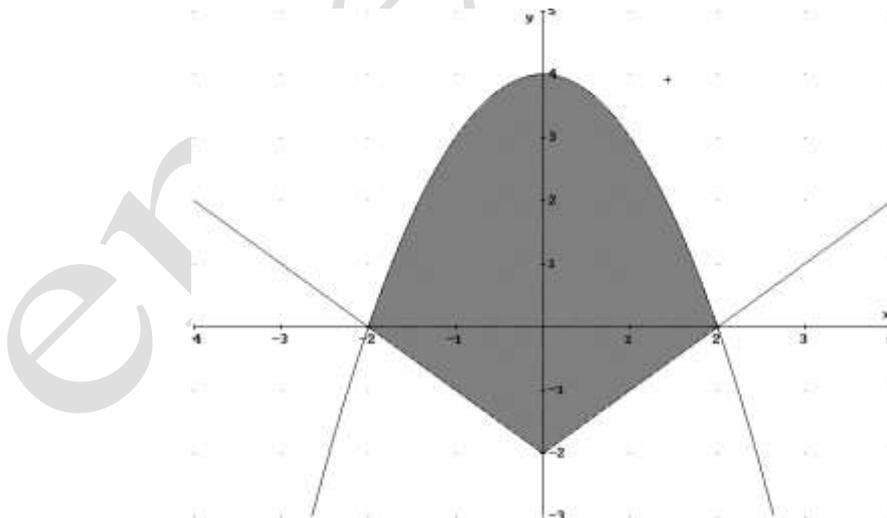
a) La función $f(x) = |x| - 2 = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x - 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ son dos semirectas que pasan por el punto $(0, -2)$.

La función $g(x) = 4 - x^2$ es una parábola cuyo vértice está en el punto $(0, 4)$ y corta al eje X en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

Calculamos los puntos de corte:

$$\text{Si } x < 0 \Rightarrow -x - 2 = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow (-2, 0) \\ x = 3 \Rightarrow \text{No válida} \end{cases}$$

$$\text{Si } x > 0 \Rightarrow x - 2 = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow (2, 0) \\ x = -3 \Rightarrow \text{No válida} \end{cases}$$



b) Calculamos el área del recinto

$$A = 2 \cdot \int_0^2 [(4 - x^2) - (x - 2)] dx = 2 \cdot \int_0^2 (-x^2 - x + 6) dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x \right]_0^2 = 2 \cdot \left(-\frac{8}{3} - 2 + 12 \right) = \frac{44}{3} u^2$$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + \int_0^x t \cdot e^t dt$

Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

MATEMÁTICAS II. 2021. JULIO. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I = \int t \cdot e^t dt$, que es una integral por partes.

$$u = t; du = dt$$

$$dv = e^t dt; v = e^t$$

$$I = \int t \cdot e^t dt = t \cdot e^t - \int e^t dt = t \cdot e^t - e^t + C$$

La función que nos dan es:

$$f(x) = 1 + \int_0^x t \cdot e^t dt = 1 + [t \cdot e^t - e^t]_0^x = 1 + (x \cdot e^x - e^x) - (0 - e^0) = x \cdot e^x - e^x + 2$$

Calculamos la primera y segunda derivada

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x - e^x = x \cdot e^x$$

$$f''(x) = x \cdot e^x + e^x = e^x(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
Signo $f''(x)$	-	+
Función	Cn	Cx

Luego, la función es cóncava en $(-\infty, -1)$ y convexa en $(-1, +\infty)$

Tiene un punto de inflexión en $\left(-1, 2 - \frac{2}{e}\right)$.

Considera la función f definida $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ (para $x \neq -1$, $x \neq 1$). Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(2,4)$.

MATEMÁTICAS II. 2021. JULIO. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx = \int 1 dx + \int \frac{2}{x^2-1} dx = x + \int \frac{2}{x^2-1} dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$; $x = -1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1) \cdot (x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x = 1 \Rightarrow 2 = 2A \Rightarrow A = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow 2 = -2B \Rightarrow B = -1$$

Con lo cual:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx = x + \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{-1}{x+1} dx = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$$

Como tiene que pasar por el punto $(2,4)$

$$4 = 2 + \ln|1| - \ln|3| + C \Rightarrow C = 2 + \ln 3$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x) = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2 + \ln 3$