EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2022

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 6
- Reserva 1, Ejercicio 5
- Reserva 2, Ejercicio 6
- Reserva 3, Ejercicio 6
- Julio, Ejercicio 5
- Julio, Ejercicio 6

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$ **donde** $m \geq 0$

a) ¿Para qué valores de m **tiene inversa la matriz** A**?.**

b) Para $m=4$ **resuelve, si es posible, la ecuación matricial** $A \cdot X = 12I$ **, donde** I **la matriz identidad de orden 3**

MATEMÁTICAS II. 2022. JUNIO. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz *A* tiene inversa si su determinante es distinto de cero, luego:

$$|A|=\begin{vmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{vmatrix}=m^3+m+m-m^2-m-m^2=0 \Rightarrow m^3-2m^2+m=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\cdot(m^2-2m+1) \Rightarrow m=0 \; ; \; m=1$$

Por lo tanto, la matriz *A* tendrá inversa para todos los valores de $m \neq 0 \; y \; 1$.

b) Calculamos la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}^t}{36}=\frac{\begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}}{36}=\begin{pmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial y calculamos la matriz *X*.

$$A\cdot X=12\cdot I \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=12\cdot A^{-1}\cdot I \Rightarrow X=12\cdot A^{-1}=12\cdot\begin{pmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{-1}

b) Calcula la matriz X **de orden tres que verifica** $AX + (A-X)^2 = X^2 + I$**, siendo** I **la matriz identidad de orden 3.**

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 1. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) Despejamos la matriz X

$$AX + (A-X)^2 = X^2 + I \Rightarrow AX + A^2 - AX - XA + X^2 = X^2 + I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A^2 - XA = I \Rightarrow A \cdot A \cdot A^{-1} - X \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1} \Rightarrow A - X = A^{-1} \Rightarrow X = A - A^{-1}$$

$$X = A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dado $a \neq 0$, considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Determina para qué valores de a se cumple que $A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot A$.

b) Para $a = 1$ calcula, si es posible, la matriz X tal que $A \cdot X = B^t$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.
MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 2 EJERCICIO 6.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{\left(A^{adj}\right)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -3 & -a \end{pmatrix}^t}{-4a} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -a & -a \end{pmatrix}}{-4a}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot A \Rightarrow \frac{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -a & -a \end{pmatrix}}{-4a} = \frac{\begin{pmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix}}{4} \Rightarrow \frac{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -a & -a \end{pmatrix}}{-a} = \begin{pmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{3}{a} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1$$

b) Calculamos la matriz X

$$A \cdot X = B^t \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B^t \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B^t$$

Luego:

$$X = A^{-1} \cdot B^t = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -9 & -5 \\ 0 & -7 & -3 \end{pmatrix}}{-4} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de la matriz A **dependiendo de los valores** m**.**
b) Para $m=0$**, resuelve la ecuación** $A\cdot X=B$**, si es posible.**
MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 3. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A y los igualamos a cero:

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix}=3m^2+2+3m-3m-3-2m^2=m^2-1=0\Rightarrow m=1\,;\ m=-1$$

Calculamos el rango de A para los distintos valores:

$$m=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow Rango(A)=2$$

$$m=-1\Rightarrow A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow Rango(A)=2$$

	R(A)
$m=1$	2
$m=-1$	2
$m\neq 1$ y -1	3

b) Calculamos la matriz inversa de A para $m=0$.

$$(A)^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial.

$$A\cdot X=B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ **,** $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de *a* para los que la matriz *B* no tiene inversa.
b) Para $a=1$, calcula *X* tal que $AXB=C$, si es posible
MATEMÁTICAS II. 2022. JULIO. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz *B* no tiene inversa si su determinante es cero, luego:

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=2+4a-2a^2-2=0\Rightarrow -2a^2+4a=0\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$$

Por lo tanto, la matriz *B* no tiene inversa para $a=0$ *y* $a=2$.

b) Calculamos la matriz *X*

$$A\cdot X\cdot B=C\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$$

Calculamos la matriz inversa de *A* y de *B*.

$$A^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{(B^{adj})^t}{|B|}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t}{2}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz *X*.

$$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$

a) Calcula: $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$ **. b) Calcula:** $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2022. JULIO. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} \xrightarrow{Paso\,1} = 2\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ p & r & q \end{vmatrix} \xrightarrow{Paso\,2} = (-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{Paso\,2} = (-1)\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot(-2) = 12$$

Paso1: Si un número multiplica a una fila o columna de un determinante, dicho número sale multiplicando al determinante.

Paso 2: Si cambiamos dos filas o dos columnas de orden, el determinante cambia de signo

b)

$$\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} \xrightarrow{Paso\,3} = \begin{vmatrix} x & a & -2a \\ y & b & -2b \\ z & c & -2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & -3p & -2a \\ y & -3q & -2b \\ z & -3r & -2c \end{vmatrix} \xrightarrow{Paso\,4} = \begin{vmatrix} x & -3p & -2a \\ y & -3q & -2b \\ z & -3r & -2c \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{Paso\,1} = (-3)\cdot(-2)\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix} \xrightarrow{Paso\,2} = 6\cdot(-1)\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} \xrightarrow{Paso\,5} -6\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-6)\cdot(-2) = 12$$

Paso 3: Si una fila o columna de un determinante está formada por dos sumandos, el determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes.

Paso 4: Si un determinante tiene dos filas o dos columnas proporcionales, el determinante vale cero

Paso 5: El determinante de una matriz y el determinante de su matriz traspuesta valen lo mismo