EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2022

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 5
- Reserva 1, Ejercicio 6
- Reserva 2, Ejercicio 5
- Reserva 3, Ejercicio 5
- Reserva 4, Ejercicio 5
- Reserva 4, Ejercicio 6

Considera el sistema: $\left\{\begin{array}{l} x-\ \ y+mz=-3 \\ -mx+3y-\ \ z=\ \ 1 \\ x-4y+mz\ =-6 \end{array}\right.$

a) Discute el sistema según los valores de m.
b) Para $m=2$ resuelve el sistema, si es posible.
MATEMÁTICAS II. 2022. JUNIO. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{vmatrix}=3m++1+4m^2-3m-4-m^2=3m^2-3=0 \Rightarrow m=1\ ;\ m=-1$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

Para $m=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=2\neq 0$

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=3\text{, ya que } \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix}=-12\neq 0$$

Para $m=-1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=4\neq 0$

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix}=0$$

	R(A)	R(M)	
$m=1$	2	3	S. Incompatible
$m=-1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$m\neq 1\ y\ -1$	3	3	S. Compatible Determinado

b) $m=2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{18}{9}=2\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{9}{9}=1\ ;\ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{-18}{9}=-2$$

En un estudio del ciclo del sueño se monitoriza la fase NO-REM (es el momento del sueño que el cuerpo utiliza para descansar físicamente). Esta fase se divide a su vez en tres momentos: Fase I (adormecimiento), Fase II (sueño ligero) y Fase III (sueño profundo). Una persona dedica el 75% de su sueño a la fase NO-REM. Además, el tiempo que dedica a la fase II es el doble que el de la fase I y III juntas. Por otro lado, a la fase III se dedica el cuádruple que a la fase I. Si una persona ha dormido 8 horas, ¿cuántos minutos dedica a las fases I, II, y III del ciclo del sueño?.
MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 1. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) Llamamos $x =$ minutos que dedica a la fase I
$y =$ minutos que dedica a la fase II
$z =$ minutos que dedica a la fase III

Calculamos los minutos que duerme una persona $8\,\text{h} \cdot 0'75 = 6\,\text{h} = 6 \cdot 60 = 360$ minutos

Planteamos el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=360 \\ y=2(x+z) \\ z=4x \end{array}\right\}$

Ordenamos y resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=360 \\ 2x-y+2z=0 \\ 4x=z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+4x=360 \\ 2x-y+8x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+y=360 \\ 10x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 15x=360 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=24 \\ y=240 \\ z=96 \end{array}\right.$$

Considera el sistema $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y+mz=3 \\ x+my-z=-1 \\ 3x+y-3z=-m \end{array}\right.$

a) Discute el sistema según los valores de m.

b) Para $m=-2$ encuentra, si es posible, y_0 para que la solución del sistema sea $x=\lambda$; $y=y_0$; $z=\lambda-\frac{3}{7}$

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 2. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & m \\ 1 & m & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-6m-9+m-3m^2+9+2=-3m^2-5m+2=0 \Rightarrow m=-2 \ ; \ m=\frac{1}{3}$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $m=-2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-7\neq 0 \Rightarrow R(A)=2$; Para $m=-2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow R(M)=2$

Para $m=\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}=\frac{2}{3}-3\neq 0 \Rightarrow R(A)=2$; Para $m=\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ 3 & 1 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}=-\frac{56}{9}\neq 0 \Rightarrow R(M)=3$

	R(A)	R(M)	
$m=-2$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$m=\frac{1}{3}$	2	3	Sistema incompatible
$m\neq -2$ y $\frac{1}{3}$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Resolvemos el sistema para $m=-2$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=3+2z \\ x-2y=-1+z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=3+2z \\ -2x+4y=2-2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{7y=5 \Rightarrow y=\frac{5}{7}\right.$$

Si $x=\lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\lambda+3\frac{5}{7}=3+2z \\ \lambda-2\frac{5}{7}=-1+z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\lambda+\frac{15}{7}-3=2z \\ \lambda-\frac{10}{7}+1=z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\lambda-\frac{6}{7}=2z \Rightarrow \lambda-\frac{3}{7}=z \\ \lambda-\frac{3}{7}=z \end{array}\right\}$

Luego es cierta la solución: $x=\lambda$; $y=\frac{5}{7}$; $z=\lambda-\frac{3}{7}$

La suma de los seguidores en una determinada red social de Alberto, Begoña y Carlos es de 13.000 personas. Aunque Carlos perdiera una tercera parte de sus seguidores, todavía seguiría teniendo el doble de seguidores que tiene Alberto. Por otro lado, los seguidores de Alberto más la quinta parte de los seguidores de Begoña, son tantos como la mitad de los de Carlos. Calcula cuántos seguidores tiene cada uno.
MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 3. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Llamamos $x =$ Seguidores de Alberto
$y =$ Seguidores de Begoña
$z =$ Seguidores de Carlos

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=13.000 \\ z-\dfrac{1}{3}z=2x \\ x+\dfrac{1}{5}y=\dfrac{z}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=13.000 \\ 2z=6x \\ 10x+2y=5z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=13.000 \\ z=3x \\ 10x+2y=5z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+y=13.000 \\ -5x+2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -8x-2y=-26.000 \\ -5x+2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=2000\ ;\ y=5000\ ;\ z=6000$$

Considera el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Discute el sistema según los valores de α.
b) Para $\alpha = 1$ resuelve el sistema y da una solución del mismo diferente de la solución trivial, si es posible.
MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 4. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{vmatrix} = -\alpha^2 + \alpha + \alpha - \alpha^2 = 0 \Rightarrow -2\alpha^2 + 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \ ; \ \alpha = 1$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $\alpha = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow R(A) = 2 \ y \ R(M) = 2$

Para $\alpha = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow R(A) = 2 \ y \ R(M) = 2$

	R(A)	R(M)	
$\alpha = 0$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$\alpha = 1$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$\alpha \neq 0 \ y \ 1$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $\alpha = 1$, el sistema que tenemos que resolver es: $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \end{array}\right.$

Otra solución sería por ejemplo: $x = 1 \ ; \ y = 0 \ ; \ z = -1$

Considera el sistema: $\begin{cases} x - my - 2z = m \\ x + y + z = 2m \\ x + 2y + mz = 3m \end{cases}$

a) Discute el sistema según los valores de m.
b) Para $m = 1$ resuelve el sistema, si es posible.
MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 4. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = m - m - 4 + 2 + m^2 - 2 = m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = 2 \; ; \; m = -2$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

Para $m = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow R(A) = 2$

Para $m = 2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow R(M) = 3$

Para $m = -2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow R(A) = 2$

Para $m = -2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow R(M) = 3$

	R(A)	R(M)	
$m = 2$	2	3	S. Incompatible
$m = -2$	2	3	S. Incompatible
$m \neq 2 \; y \; -2$	3	3	S. Compatible Determinado

b) $m = 1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1 \; ; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$