EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2022

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

Considera la función continua f definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x<-1 \\ ax+b & si \quad -1\le x<1 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & si \quad x\ge 1 \end{cases}$$

a) Calcula a y b.
b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.
MATEMÁTICAS II. 2022. JUNIO. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad en $x=-1$:

1) $f(-1)=-a+b$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{1}{x}=-1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} (ax+b)=-a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)\Rightarrow -a+b=-1$

Estudiamos la continuidad en $x=1$:

1) $f(1)=\dfrac{1}{2}$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} (ax+b)=a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Rightarrow a+b=\dfrac{1}{2}$

Resolvemos el sistema: $\left.\begin{array}{r} -a+b=-1 \\ a+b=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow a=\dfrac{3}{4}\ ;\ b=-\dfrac{1}{4}$

b) La rama $\dfrac{1}{x}$ tiene una asíntota vertical en $x=0$, pero no está en su dominio ya que $x<-1$.

Calculamos la asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{-\infty}=0\Rightarrow y=0$ es una asíntota horizontal.

La rama $\dfrac{x^2}{x+1}$ tiene una asíntota vertical en $x=-1$, pero no está en su dominio ya que $x\ge 1$

No tiene asíntota horizontal ya que: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{\infty}{\infty}\xrightarrow{L'Hopital}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{1}=\infty$

Calculamos la oblícua: $y=x-1$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x+1}}{x}=\frac{x^2}{x^2+x}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{L'Hopital}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x+1}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{L'Hopital}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2}=1$$

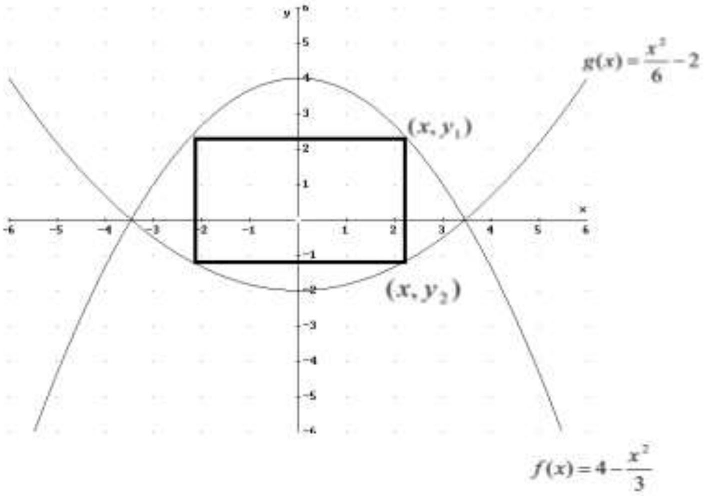
$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x^2-x}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{x+1}\right)=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{L'Hopital}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{1}=-1$$

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 4 - \frac{x^2}{3}$ y $g(x) = \frac{x^2}{6} - 2$

MATEMÁTICAS II. 2022. JUNIO. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Dibujamos las dos parábolas que nos dan



En la figura vemos que:

la base del rectángulo es: $a = x + x = 2x$

la altura es: $b = y_1 - y_2 = \left(4 - \frac{x^2}{3}\right) - \left(\frac{x^2}{6} - 2\right) = 6 - \frac{x^2}{2}$

La función que queremos que sea máxima es: $S_{\max} = a \cdot b = 2x \cdot \left(6 - \frac{x^2}{2}\right) = 12x - x^3$

Derivamos e igualamos a cero: $S' = 12 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 2$. La solución $x = -2$ no sirve, ya que x es una longitud

Comprobamos que es un máximo: $S''(x) = -6x \Rightarrow S''(2) = -12 < 0 \Rightarrow$ Máximo

Luego, las dimensiones son:

la base del rectángulo es: $a = 2x = 4\ u$

la altura es: $b = y_1 - y_2 = \left(4 - \frac{2^2}{3}\right) - \left(\frac{2^2}{6} - 2\right) = \frac{8}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{12}{3} = 4\ u$

Sea *f* la función continua definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{ax+b}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$ **.**

a) Determina *a* y *b* sabiendo que *f* tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x=2$.

b) Para $a=2$ y $b=-1$, estudia la derivabilidad de *f*.

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 1. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) Continua en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x-1}=\dfrac{1}{-1}=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{ax+b}{(x+1)^2}=\dfrac{b}{1}=b \end{array}\right\} \Rightarrow b=-1$$

Extremo relativo en

$$x=2 \Rightarrow f'(2)=0 \Rightarrow f'(x)=\frac{a\cdot(x+1)^2-2\cdot(x+1)\cdot(ax+b)}{(x+1)^4}=\frac{a\cdot(x+1)-2\cdot(ax+b)}{(x+1)^3} \Rightarrow$$

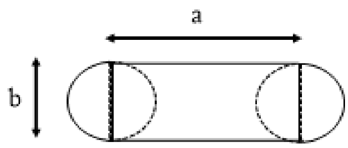
$$\Rightarrow f'(2)=\frac{a\cdot 3-2\cdot(2a-1)}{(2+1)^3}=0 \Rightarrow a-2=0 \Rightarrow a=2$$

b) Calculamos la derivada

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{2x-1}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2x(x-1)-1(x^2+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} & si \quad x<0 \\ \dfrac{2(x+1)^2-2(x+1)(2x-1)}{(x+1)^4}=\dfrac{2(x+1)-2(2x-1)}{(x+1)^3}=\dfrac{-2x+4}{(x+1)^3} & si \quad x>0 \end{cases}$$

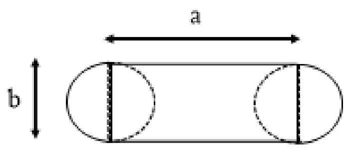
$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=-1 \\ f'(0^+)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)\neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x=0\text{, luego, es derivable en } \mathbb{R}-\{0\}$$

Se quiere cercar un trozo de terreno como el de la figura, de modo que el área del recinto central rectangular sea de $\frac{200}{\pi}$ metros cuadrados. Sabiendo que el coste de la cerca que se puede poner en los tramos rectos es de 10 euros por metro lineal, y en los tramos circulares de 20 euros por metro lineal, calcula las dimensiones a y b del terreno para las que se minimiza el coste del cercado.



MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 1. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $C_{\min} = 2a \cdot 10 + 2\pi \frac{b}{2} \cdot 20 = 20a + 20\pi b$

b) Relación entre las variables: $a \cdot b = \frac{200}{\pi} \Rightarrow b = \frac{200}{a \cdot \pi}$

c) Expresamos la función que queremos que sea mínimo con una sola variable.

$$C_{\min} = 20a + 20\pi b = 20a + 20\pi \frac{200}{a \cdot \pi} = 20a + \frac{4000}{a}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$C'_{\min} = 20 - \frac{4000}{a^2} = \frac{20a^2 - 4000}{a^2} = 0 \Rightarrow 20a^2 - 4000 = 0 \Rightarrow a = \sqrt{200}$$

e) Comprobamos que corresponde a un mínimo

$$C'' = \frac{8000}{a^3} \Rightarrow C''(\sqrt{200}) = \frac{8000}{(\sqrt{200})^3} > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

Luego, las dimensiones son: $a = \sqrt{200}\, m = 14'14\ m$; $b = \frac{200}{\sqrt{200} \cdot \pi} m = 4'5\ m$

Sea *f* la función continua definida por $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{si} \quad x\le 0 \\ \sqrt{ax+b} & \text{si} \quad 0<x\le 2 \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}} & \text{si} \quad 2<x \end{cases}$

a) Calcula *a* y *b*.
b) Para $a=-1$ y $b=4$, estudia si existe la derivada de *f* en $x=2$. En caso afirmativo, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en dicho punto.
MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 2. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) La función es continua, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} x^2+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{ax+b}=\sqrt{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{b}=2 \Rightarrow b=4$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{ax+b}=\sqrt{2a+4} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{-2}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2a+4}=\dfrac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2a+4=2 \Rightarrow a=-1$$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{si} \quad x\le 0 \\ \sqrt{-x+4} & \text{si} \quad 0<x\le 2 \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}} & \text{si} \quad 2<x \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{-x+4}} & \text{si} \quad 0<x<2 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} & \text{si} \quad 2<x \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=\dfrac{-1}{2\sqrt{-2+4}}=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \\ f'(2^+)=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)=f'(2^+) \Rightarrow \text{ La función es derivable en } x=2$$

Calculamos la recta tangente en $x=2$: $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$

$$f(2)=\sqrt{-2+4}=\sqrt{2}$$

$$f'(2)=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

Luego la recta tangente en $x=2$ es $y-\sqrt{2}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cdot(x-2) \Rightarrow y=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}x+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(x^2+1)$ (donde ln denota la función logaritmo neperiano).
a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
b) Determina los intervalos de convexidad y de concavidad de *f* y los puntos de inflexión de su gráfica.
MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 2. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}=0\Rightarrow x=0$

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
Signo f'	$-$	$+$
Función	D	C

La función es decreciente en $(-\infty,0)$ y creciente en $(0,+\infty)$. Tiene un mínimo en (0,0)

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f''(x)=\frac{2\cdot(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow x=\pm 1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
Signo f''	$-$	$+$	$-$
Función	Cn	Cx	Cn

La función es cóncava en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y convexa en $(-1,1)$. Tiene puntos de inflexión en $(-1,\ln 2)$ y $(1,\ln 2)$

Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x \to 0} \frac{a\,sen(x) + x\ln(x+1) + b\,x^2}{x^3 + x^2} = 2$ (donde ln denota la función logaritmo neperiano)

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 3. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \to 0} \frac{a\,sen(x) + x\ln(x+1) + b\,x^2}{x^3 + x^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a\cos(x) + 1 \cdot \ln(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1} + 2b\,x}{3x^2 + 2x} = \frac{a}{0} \Rightarrow$$

Como el límite es finito, entonces, $a = 0$ y podemos seguir aplicando la regla de L'Hopital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 \cdot \ln(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1} + 2b\,x}{3x^2 + 2x} = \frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot x}{(x+1)^2} + 2b}{6x + 2} = \frac{1 + 1 + 2b}{2} = 2 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

Luego, los valores son: $a = 0$; $b = 1$

Sea $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, la función definida por $f(x)=e^{x}(\cos(x)+sen(x))$

a) Halla los extremos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)

b) Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=\frac{3\pi}{2}$

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 3. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=e^{x}(\cos x+sen\,x)+e^{x}(-senx+\cos x)=e^{x}\cdot 2\cos x=0\Rightarrow \cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\ ;\ x=\frac{3\pi}{2}$$

	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$
Signo $f'(x)$	+	—	+
Función	C	D	C

La función es creciente en el intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ y decreciente en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

Tiene un Máximo relativo en $\left(\frac{\pi}{2},e^{\frac{\pi}{2}}\right)$ y un mínimo relativo en $\left(\frac{3\pi}{2},-e^{\frac{3\pi}{2}}\right)$

Calculamos: $f(0)=1$; $f(2\pi)=e^{2\pi}=535'49$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}=4'81$; $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-e^{\frac{3\pi}{2}}=-111'31$

Luego el máximo absoluto es $(2\pi,535'49)$ y el mínimo absoluto es $\left(\frac{3\pi}{2},-111'31\right)$

b) La ecuación de la recta tangente es: $y-f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$ y la ecuación de la recta normal es: $y-f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{1}{f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)}\cdot\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$

Calculamos $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-e^{\frac{3\pi}{2}}=-111'31$ y $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$

Luego, la recta tangente es: $y+e^{\frac{3\pi}{2}}=0\cdot\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow y=-e^{\frac{3\pi}{2}}$

La recta normal es: $y+e^{\frac{3\pi}{2}}=-\frac{1}{0}\cdot\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}$

Sea f la función continua definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{\lambda x}-e^{x}-x}{x^{2}} & si \quad x\neq 0 \\ \mu & si \quad x=0 \end{cases}$.

a) Calcula λ y μ.

b) Para $\lambda=2$, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 4. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) Como la función es continua se cumple que:

$$f(0)=\mu$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\lambda x}-e^{x}-x}{x^{2}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{\lambda e^{\lambda x}-e^{x}-1}{2x}=\frac{\lambda-2}{0}\Rightarrow \lambda-2=0\Rightarrow \lambda=2$$

Como es continua el límite tiene que existir, luego, $\lambda-2=0$ para que podamos seguir aplicando L'Hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\lambda x}-e^{x}-x}{x^{2}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{\lambda e^{\lambda x}-e^{x}-1}{2x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-e^{x}}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\mu \\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\lambda x}-e^{x}-x}{x^{2}}=\frac{3}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow \mu=\frac{3}{2}$$

b) La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ es: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

Calculamos: $f(1)=\dfrac{e^{2}-e-1}{1}=e^{2}-e-1$

$$f'(x)=\frac{(2e^{2x}-e^{x}-1)\cdot x^{2}-2x\cdot(e^{2}-e^{x}-x)}{x^{4}}\Rightarrow f'(1)=\frac{(2e^{2}-e-1)-2\cdot(e^{2}-e-1)}{1}=e+1$$

Sustituyendo, tenemos:

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-e^{2}+e+1=(e+1)(x-1)\Rightarrow y-e^{2}+e+1=ex-e+x-1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=(e+1)x+e^{2}-2e-2$$

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^4-3x^2+2}{(x+2)^3}$, para $x\neq -2$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) Calcula la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 4. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R}-\{-2\}$.

Asíntotas Verticales: En principio es la recta $x=-2$. Vamos a comprobarlo

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x^4-3x^2+2}{(x+2)^3}=\frac{6}{0^-}=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to -2^+}\frac{x^4-3x^2+2}{(x+2)^3}=\frac{6}{0^+}=+\infty$$

Luego $x=-2$ es una asíntota vertical

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2+2}{(x+2)^3}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-6x}{3(x+2)^2}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2-6}{6(x+2)}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{L'Hopital}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{24x}{6}=\infty\Rightarrow \textit{No tiene}$$

Asíntota oblicua: $y=x-6$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^3+6x^2+12x+8}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2+2}{x^4+6x^3+12x^2+8x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^4-3x^2+2}{x^3+6x^2+12x+8}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^4-3x^2+2-x^4-6x^3-12x^2-8x}{x^3+6x^2+12x+8}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-6x^3-15x^2-8x+2}{x^3+6x^2+12x+8}\right]=-6$$

b) La ecuación de la recta normal es: $y-f(0)=-\dfrac{1}{f'(0)}(x-0)$

$$f(0)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

$$f'(x)=\frac{(4x^3-6x)(x+2)^3-3(x+2)^2(x^4-3x^2+2)}{(x+2)^6}=\frac{(4x^3-6x)(x+2)-3(x^4-3x^2+2)}{(x+2)^4}\Rightarrow f'(0)=\frac{-6}{16}=-\frac{3}{8}$$

$$y-f(0)=-\frac{1}{f'(0)}(x-0)\Rightarrow y-\frac{1}{4}=-\frac{1}{-\frac{3}{8}}(x-0)\Rightarrow y-\frac{1}{4}=\frac{8}{3}(x-0)\Rightarrow y=\frac{8}{3}x+\frac{1}{4}$$

Calcula a sabiendo que $\lim_{x \to +\infty} \frac{ax}{(\ln(x))^3 + 2x} = 1$

(donde ln denota la función logaritmo neperiano)

MATEMÁTICAS II. 2022. JULIO. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax}{(\ln(x))^3 + 2x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

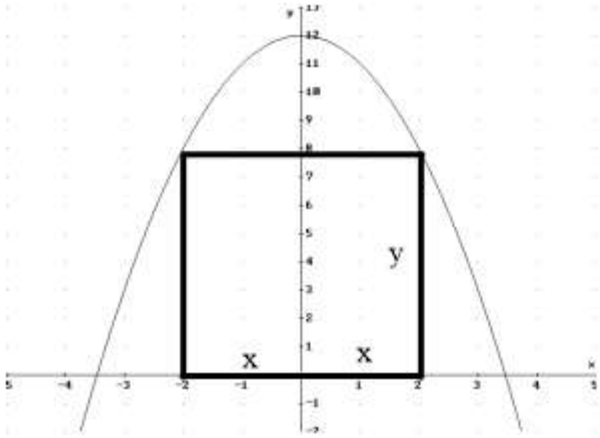
$\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{3(\ln(x))^2 \cdot \frac{1}{x} + 2} = \frac{a}{3 \cdot \infty \cdot \frac{1}{\infty} + 2}$ Pero como la función polinómica crece mucho más rápido que la función logarítmica, aunque esté al cuadrado, entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{3(\ln(x))^2 \cdot \frac{1}{x} + 2} = \frac{a}{3 \cdot \infty \cdot \frac{1}{\infty} + 2} = \frac{a}{\frac{3}{\infty} + 2} = \frac{a}{0 + 2} = 1 \Rightarrow a = 2$$

Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=-x^2+12$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.
MATEMÁTICAS II. 2022. JULIO. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un dibujo



a) La función que queremos que sea máxima es: $S_{\max}=2x\cdot y$

b) Relación entre las variables: $y=-x^2+12$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max}=2x\cdot(-x^2+12)=-2x^3+24x$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'=-6x^2+24=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

La solución válida es $+2$ ya que es una longitud. Comprobamos que es máximo.

$$S''=-12x\Rightarrow S''(2)=-24<0\Rightarrow \text{ Máximo}$$

Luego, las dimensiones son: $base=2x=4\ u$; $altura=y=8\ u$

El área es: $S_{\max}=2x\cdot y=2\cdot 2\cdot 8=32\ u^2$

Los vértices son: $(2,0)$; $(-2,0)$; $(2,8)$; $(-2,8)$