EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2022

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 3
- Junio, Ejercicio 4

Sea f la función definida por: $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & si \quad x<0 \\ (x-2)^2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función.
b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y por el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2022. JUNIO. EJERCICIO 3.

R E S O L U C I Ó N

a) El punto de corte con el eje X es $y=0\Rightarrow 2x+4=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow(-2,0)$

$$y=0\Rightarrow(x-2)^2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow(2,0)$$

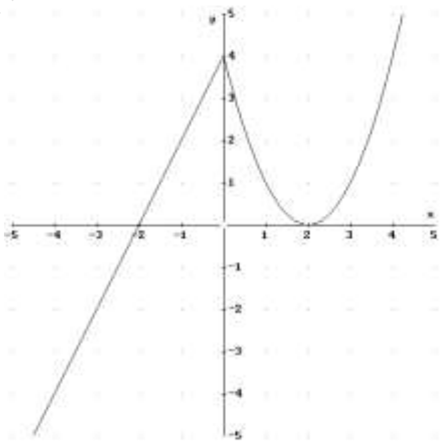
Como $f(x)=2x+4$, es una recta, hacemos una tabla de valores

x	$f(x)=2x+4$
0	4
-1	2
-2	0

Como $f(x)=(x-2)^2$, es una parábola, hacemos una tabla de valores

x	$f(x)=(x-2)^2$
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4

Luego la gráfica será:



b) Área = $\int_{-2}^{0}(2x+4)dx+\int_{0}^{2}(x-2)^2dx=\left[x^2+4x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{0}^{2}=4+\frac{8}{3}=\frac{20}{3}u^2$

Considera la función f definida por: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$ para $x\neq 1$. Halla una primitiva de f que pase por el punto $(2,6)$

MATEMÁTICAS II. 2022. JUNIO. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx=\int (x+2)\,dx+\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-2x+1=0\Rightarrow x=1\,;\ x=1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{3x-2}{x^2-2x+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo, luego:

$$x=1\Rightarrow 1=B$$
$$x=0\Rightarrow -2=-A+B\Rightarrow -2=-A+1\Rightarrow A=3$$

Con lo cual:

$$\int \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int \frac{3}{x-1}\,dx+\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|+\int (x-1)^{-2}\,dx=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|+\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+C=$$
$$=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$$

Calculamos la primitiva que pasa por $(2,6)$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C\Rightarrow F(2)=6\Rightarrow \frac{2^2}{2}+2\cdot 2+3\ln|2-1|-\frac{1}{2-1}+C=6\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2+4+3\ln|1|-1+C=6\Rightarrow C=1$$

Luego: $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\dfrac{1}{x-1}+1$