EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2022

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 3
- Junio, Ejercicio 4
- Reserva 1, Ejercicio 3
- Reserva 1, Ejercicio 4
- Reserva 2, Ejercicio 3
- Reserva 2, Ejercicio 4
- Reserva 3, Ejercicio 3
- Reserva 3, Ejercicio 4
- Reserva 4, Ejercicio 3
- Reserva 4, Ejercicio 4
- Julio, Ejercicio 3
- Julio, Ejercicio 4

Sea f la función definida por: $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & si \quad x<0 \\ (x-2)^2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función.
b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y por el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2022. JUNIO. EJERCICIO 3.

R E S O L U C I Ó N

a) El punto de corte con el eje X es $y=0\Rightarrow 2x+4=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow(-2,0)$

$$y=0\Rightarrow (x-2)^2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow(2,0)$$

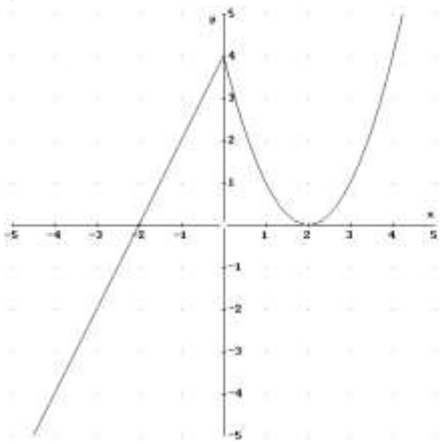
Como $f(x)=2x+4$, es una recta, hacemos una tabla de valores

x	$f(x)=2x+4$
0	4
–1	2
–2	0

Como $f(x)=(x-2)^2$, es una parábola, hacemos una tabla de valores

x	$f(x)=(x-2)^2$
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4

Luego la gráfica será:



b) Área = $\int_{-2}^{0}(2x+4)dx+\int_{0}^{2}(x-2)^2dx=\left[x^2+4x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{0}^{2}=4+\frac{8}{3}=\frac{20}{3}u^2$

Considera la función f definida por: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$ para $x\neq 1$. Halla una primitiva de f que pase por el punto $(2,6)$

MATEMÁTICAS II. 2022. JUNIO. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx=\int (x+2)\,dx+\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-2x+1=0\Rightarrow x=1\,;\ x=1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{3x-2}{x^2-2x+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo, luego:

$$x=1\Rightarrow 1=B$$
$$x=0\Rightarrow -2=-A+B\Rightarrow -2=-A+1\Rightarrow A=3$$

Con lo cual:

$$\int \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int \frac{3}{x-1}\,dx+\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|+\int (x-1)^{-2}\,dx=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|+\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+C=$$
$$=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$$

Calculamos la primitiva que pasa por $(2,6)$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C\Rightarrow F(2)=6\Rightarrow \frac{2^2}{2}+2\cdot 2+3\ln|2-1|-\frac{1}{2-1}+C=6\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2+4+3\ln|1|-1+C=6\Rightarrow C=1$$

Luego: $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\dfrac{1}{x-1}+1$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{x}\cdot sen(2x)$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0,0)$

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 1. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

Es una integral por partes cíclica

$$\int e^{x}\cdot sen(2x)\ dx=-\frac{1}{2}e^{x}\cos(2x)+\frac{1}{2}\int e^{x}\cdot\cos(2x)\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{x}\cos(2x)+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{x}sen(2x)-\frac{1}{2}\int e^{x}sen(2x)dx\right]=-\frac{1}{2}e^{x}\cos(2x)+\frac{1}{4}e^{x}sen(2x)-\frac{1}{4}\int e^{x}sen(2x)dx$$

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)\int e^{x}\cdot sen(2x)\ dx=-\frac{1}{2}e^{x}\cos(2x)+\frac{1}{4}e^{x}sen(2x)=$$

$$=\frac{5}{4}\int e^{x}\cdot sen(2x)\ dx=-\frac{1}{2}e^{x}\cos(2x)+\frac{1}{4}e^{x}sen(2x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int e^{x}\cdot sen(2x)\ dx=\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{2}e^{x}\cos(2x)+\frac{1}{4}e^{x}sen(2x)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x)=\int e^{x}\cdot sen(2x)\ dx=\frac{-2e^{x}\cos(2x)+e^{x}sen(2x)}{5}+C$$

$u=e^{x};\ du=e^{x}\ dx$ $dv=sen(2x)\,x\,dx;\ v=-\frac{1}{2}\cos(2x)$	$u=e^{x};\ du=e^{x}\ dx$ $dv=\cos(2x)\,dx;\ v=\frac{1}{2}sen(2x)$

Como pasa por el origen de coordenadas:

$$F(0)=0\Rightarrow 0=\frac{-2e^{0}\cos 0^{o}+e^{0}sen\,0^{o}}{5}+C\Rightarrow 0=\frac{-2}{5}+C\Rightarrow C=\frac{2}{5}$$

Luego, la función primitiva que nos piden es: $F(x)=\dfrac{-2e^{x}\cos(2x)+e^{x}sen(2x)}{5}+\dfrac{2}{5}$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = 2x^2$

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza el recinto que delimitan.

b) Determina el área del recinto anterior.

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 1. EJERCICIO 4

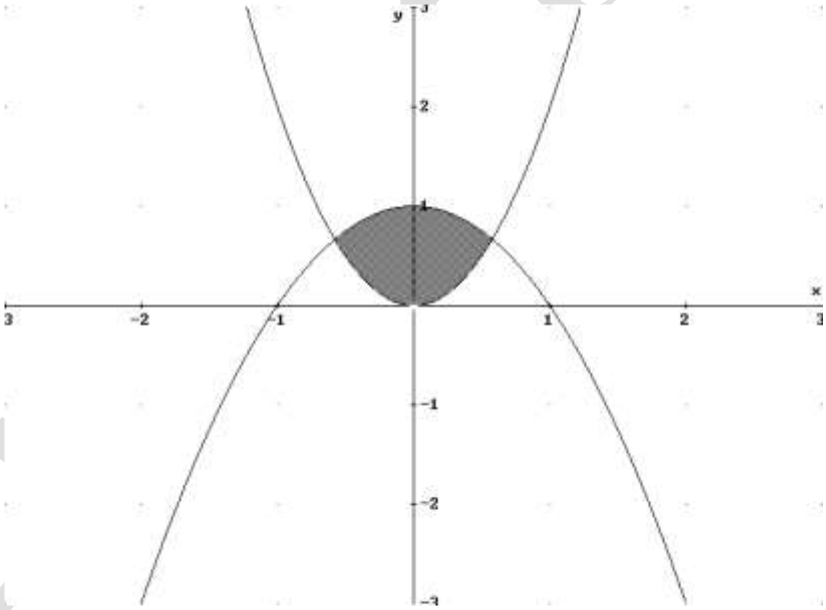
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$1 - x^2 = 2x^2 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Luego, los puntos de corte son: $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}\right)$.

Hacemos el dibujo de las dos parábolas



b) Como es simétrica, el área pedida es:

$$A = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{\frac{1}{3}}} (1 - x^2 - 2x^2)\, dx = 2 \cdot \left[x - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{\frac{1}{3}}} = 2 \cdot \left[x - x^3 \right]_0^{\sqrt{\frac{1}{3}}} = 2 \cdot \left[\sqrt{\frac{1}{3}} - \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right)^3 \right] =$$

$$= 2 \cdot \left[\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \right] = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = 0'7698\ u^2$$

Considera la función $F:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_0^x 2t\cdot\cos(t)\,dt$

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de F.
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x=\pi$
MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 2. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I=\int 2t\cdot\cos t\;dt$, que es una integral por partes.

$u=2t;\;\; du=2\,dt$
$dv=\cos t\,dt;\; v=sen\,t$

$$I=\int 2t\cdot\cos t\;dt=2t\,sen\,t-2\int sen\,t\,dt=2t\,sen\,t+2\cos t+C$$

La función que nos dan es: $F(x)=\int_0^x 2t\cdot\cos(t)\;dt=\left[2t\,sen\,t+2\cos t\right]_0^x=2x\,sen\,x+2\cos x-2$

Calculamos la primera

$$F'(x)=2\,sen\,x+2x\cos x-2\,sen\,x=2x\cos x=0\Rightarrow\begin{cases}2x=0\Rightarrow x=0\\ \cos x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}\;;\;x=\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$
Signo $F'(x)$	+	–	+
Función	C	D	C

Luego, la función es creciente en $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ y decreciente en $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

Tiene un Máximo en $\left(\frac{\pi}{2},\pi+2\right)$ y un mínimo en $\left(\frac{3\pi}{2},-\pi+2\right)$.

b) La ecuación de la recta tangente es: $y-F(\pi)=F'(\pi)\cdot(x-\pi)$
Calculamos:

$F(\pi)=2\pi\,sen\,\pi+2\cos\pi+2=-2-2=-4$

$F'(\pi)=2\pi\cos\pi=-2\pi$

Luego, sustituyendo, tenemos que: $y+4=-2\pi\cdot(x-\pi)\Rightarrow y=-2\pi x+2\pi^2-4$

Calcula $\int_0^1 x \cdot arctg(x)\, dx$ (donde arctg denota la función arcotangente).

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 2. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral indefinida por partes

$$\boxed{\begin{array}{l} u = arc\,tg\, x;\ \ du = \dfrac{1}{1+x^2}\, dx \\ dv = x \cdot dx;\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}}$$

$$\int x\, arc\,tg\, x\, dx = \frac{x^2}{2} arc\,tg\, x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

Dividimos $\dfrac{x^2}{1+x^2}$ para descomponer la integral

$$\int x\, arc\,tg\, x\, dx = \frac{x^2}{2} arc\,tg\, x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} arc\,tg\, x - \frac{1}{2}\left[\int 1 dx + \int \frac{-1}{1+x^2} dx\right] =$$

$$= \frac{x^2}{2} arc\,tg\, x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} arc\,tg\, x + C$$

Calculamos la integral que nos pedían

$$\int_0^1 x\, arc\,tg\, x\, dx = \left[\frac{x^2}{2} arc\,tg\, x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} arc\,tg\, x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} arc\,tg\, 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} arc\,tg\, 1\right) - \left(\frac{1}{2} arc\,tg\, 0\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} arc\,tg\, 0\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3-x$. Calcula el área total de los recintos limitados por la gráfica de la función *f* y la recta normal a dicha gráfica en el punto de abscisa $x=0$.
MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 3. EJERCICIO 3.

R E S O L U C I Ó N

La ecuación de la recta normal es: $y-f(0)=-\dfrac{1}{f'(0)}\cdot(x-0)$.

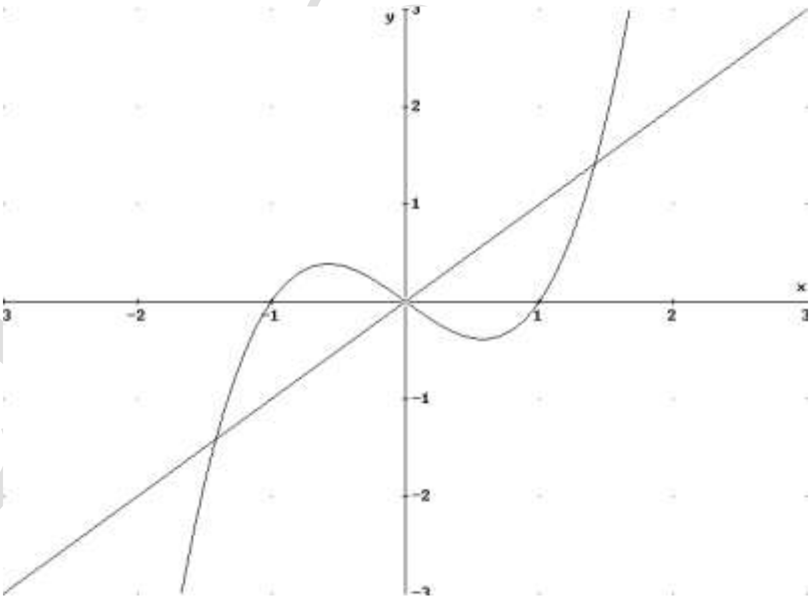
$f(0)=0$

$f'(x)=3x^2-1 \Rightarrow f'(0)=-1$

Sustituyendo, tenemos: $y-f(0)=-\dfrac{1}{f'(0)}\cdot(x-0)\Rightarrow y-0=-\dfrac{1}{-1}\cdot(x-0)\Rightarrow y=x$

Calculamos los puntos de corte de la dos funciones

$$x^3-x=x\Rightarrow x^3-2x=0\Rightarrow x(x^2-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$



El área de la región pedida es:

$$A=2\int_0^{\sqrt{2}}(x-x^3+x)\,dx=2\int_0^{\sqrt{2}}(-x^3+2x)\,dx=2\left[-\frac{x^4}{4}+x^2\right]_0^{\sqrt{2}}=2\left(-1+2\right)=2\ u^2$$

Calcula $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$ **.(Sugerencia: efectúa el cambio de variable** $t=\sqrt{1+x}$ **).**

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 3. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $t=\sqrt{1+x}$, vamos a calcular cuanto vale dx:

$$dt=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\,dx=\frac{1}{2t}\,dx \Rightarrow dx=2t\,dt$$

$$t=\sqrt{1+x} \Rightarrow t^2=1+x \Rightarrow x=t^2-1$$

Calculamos los nuevos límites de integración:

$$x=0 \Rightarrow t=1$$

$$x=3 \Rightarrow t=2$$

Sustituyendo, tenemos:

$$\int_1^2 \frac{(t^2-1)}{t}\cdot(2t\,dt)=2\int_1^2 (t^2-1)\,dt=2\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_1^2=2\left[\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right]=2\left[\left(\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]=\frac{8}{3}$$

Calcula $\displaystyle\int \frac{2x^3+2x^2-2x+7}{x^2+x-2}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 4. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+2x^2-2x+7 & x^2+x-2 \\ \hline -2x^3-2x^2+4x & 2x \\ \hline 2x+7 & \end{array}$$

Con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{2x^3+2x^2-2x+7}{x^2+x-2}\,dx=\int 2x\,dx+\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx=x^2+\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2+x-2=0\Rightarrow x=1\,;\;\; x=-2$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x+7}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)\cdot(x+2)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1\Rightarrow 9=3A\Rightarrow A=3$$
$$x=-2\Rightarrow 3=-3B\Rightarrow B=-1$$

Con lo cual:

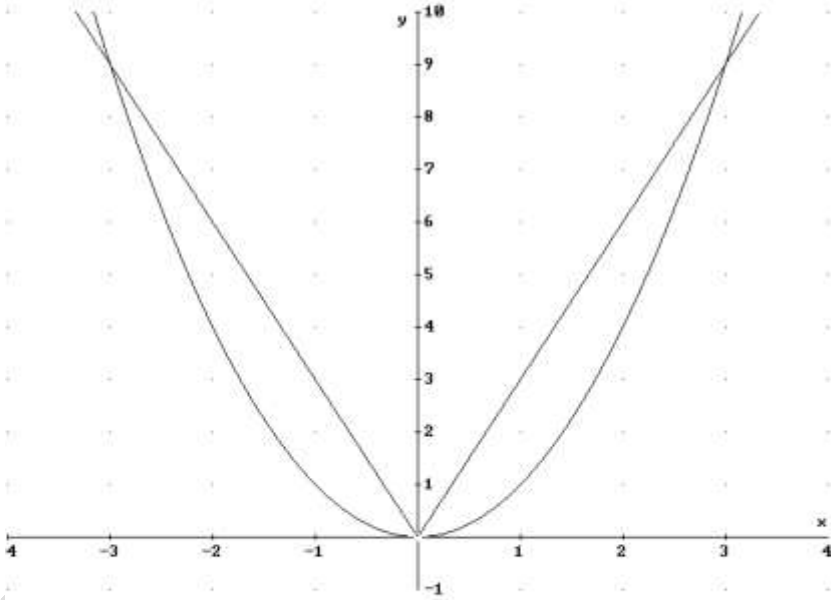
$$\int \frac{2x^3+2x^2-2x+7}{x^2+x-2}\,dx=x^2-3x+\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx=x^2+\int \frac{3}{x-1}dx-\int \frac{1}{x+2}dx=$$
$$=x^2+3\ln|x-1|-\ln|x+2|+C$$

Considera las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por: $f(x)=x^2$ y $g(x)=a|x|$, con $a>0$. Determina el valor de a para que el área total de los recintos limitados por las gráficas de ambas funciones sea de 9 unidades cuadradas.
MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 4. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x)=x^2$ es una parábola cuyo vértice está en el punto $(0,0)$.

La función $g(x)=a|x|=\begin{cases} ax & si \quad x\geq 0 \\ -ax & si \quad x<0 \end{cases}$ son dos rectas.



Calculamos el punto de corte

$$x^2=ax \Rightarrow x^2-ax=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=a \end{cases}$$

$$x^2=-ax \Rightarrow x^2+ax=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-a \end{cases}$$

Como los recintos son simétricos, el área es:

$$A=2\cdot\int_0^a \left(ax-x^2\right)\,dx=2\cdot\left[\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=2\left(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}\right)=2\cdot\frac{a^3}{6}=9\Rightarrow a^3=27\Rightarrow a=3$$

Calcula $\int_{3}^{8} \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} dx$.(Sugerencia: efectúa el cambio $t=\sqrt{1+x}-1$)

MATEMÁTICAS II. 2022. JULIO. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $\sqrt{1+x}-1=t$, vamos a calcular los nuevos límites de integración.

Si $x=3 \Rightarrow \sqrt{1+3}-1=t \Rightarrow t=1$

Si $x=8 \Rightarrow \sqrt{1+8}-1=t \Rightarrow t=2$

Vamos a calcular cuanto vale dx:

$$\sqrt{1+x}-1=t \Rightarrow \sqrt{1+x}=1+t \Rightarrow 1+x=(1+t)^2 \text{ , con lo cual } dx=2\cdot(1+t)\cdot dt$$

Sustituyendo, nos queda:

$$\int_{3}^{8} \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} dx = \int_{1}^{2} \frac{1}{t}\cdot 2\cdot(1+t)\cdot dt = 2\int_{1}^{2} \frac{1+t}{t} dt = 2\int_{1}^{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)dt =$$

$$= 2\left[t+\ln|t|\right]_{1}^{2} = 2\cdot\left[(2+\ln 2)-(1+\ln 1)\right] = 2\left[1+\ln 2)\right] = 3'38$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$
a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g*. Esboza sus gráficas.
b) Determina el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g* en el primer cuadrante.
MATEMÁTICAS II. 2022. JULIO. EJERCICIO 4

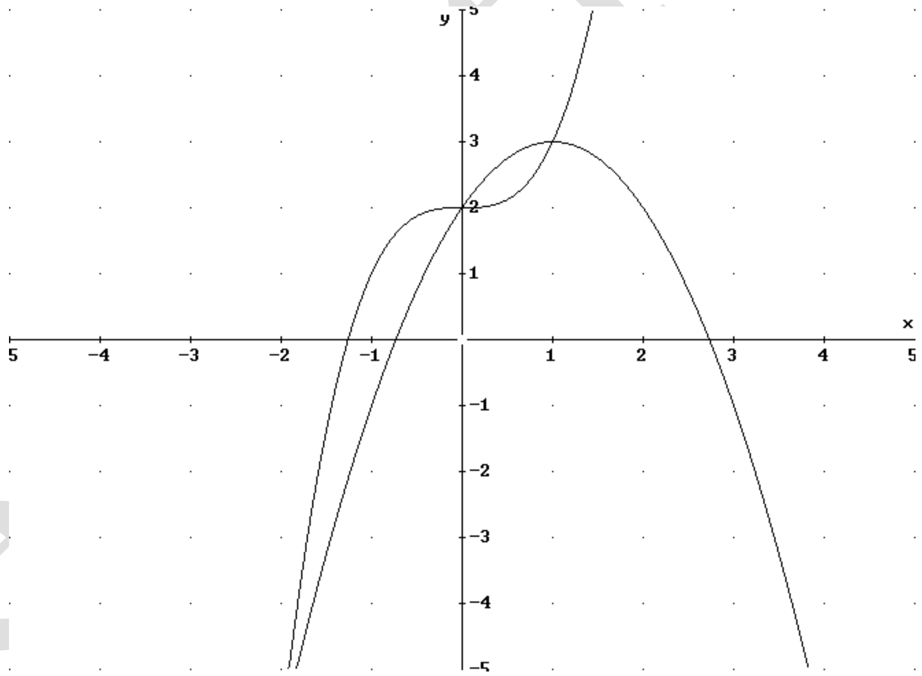
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte de dichas funciones

$$x^3 + 2 = -x^2 + 2x + 2 \Rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases}$$

Luego, los puntos de corte son: $(0,2)$; $(1,3)$; $(-2,-6)$

Dibujamos las dos funciones:



b) Calculamos el área entre *f* y *g* en el primer cuadrante

$$A = \int_0^1 \left((-x^2 + 2x + 2) - (x^3 + 2)\right) dx = \int_0^1 \left(-x^3 - x^2 + 2x\right) dx = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1\right) - (0) = \frac{5}{12}\ u^2$$