EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2023

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: MATRICES

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores del parámetro *a* para los que tanto *A* como *B* admitan inversa.
b) Para $a=1$, halle una matriz *X* que satisfaga $A\cdot X\cdot B=C$.
SOCIALES II. 2023 JUNIO. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de *A*.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2-2a=0\Rightarrow a=0 \quad ; \quad a=2$$

Luego, la matriz *A* tiene inversa para todos los valores de $a\neq 0 \ y \ 2$.

Calculamos el determinante de *B*.

$$|B|=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{vmatrix}=-2+a=0\Rightarrow a=2$$

Luego, la matriz *B* tiene inversa para todos los valores de $a\neq 2$.

Por lo tanto, *A* y *B* tienen inversa para $a\neq 0 \ y \ 2$

b) Despejamos la matriz *X*:

$$A\cdot X\cdot B=C\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$$

Calculamos la inversa de *A*: $A^{-1}=\dfrac{(A^{adj})^t}{|A|}=\dfrac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t}{-1}=\dfrac{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculamos la inversa de *B*: $B^{-1}=\dfrac{(B^{adj})^t}{|B|}=\dfrac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t}{-1}=\dfrac{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Luego:

$$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Un agricultor vende la producción de tres tipos de uva, Tempranillo, Garnacha y Macabeo, de dos de sus fincas. La matriz $Q=\begin{pmatrix} 50 & 40 & 35 \\ 0 & 60 & 55 \end{pmatrix}$ recoge la producción, en miles de kilogramos, de estos tipos de uva en cada finca. El precio de venta por kilogramo, en céntimos de euro, según el tipo de uva y la finca, viene dado por la matriz $P=\begin{pmatrix} 40 & 38 & 42 \\ 34 & 37 & 40 \end{pmatrix}$.

Calcule el producto $Q \cdot P^t$ y explique el significado económico de los elementos de la diagonal principal del resultado. Indique también la cantidad total de dinero que ha obtenido el agricultor por la venta de la cosecha de las dos fincas.

b) Dada la siguiente ecuación matricial $M \cdot X + N = V$:

b.1) Suponiendo que M sea invertible, despeje la matriz *X* de la ecuación anterior

b.2) Para $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $V=\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, calcule la matriz *X*.

SOCIALES II. 2023 RESERVA 1. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos

$$Q \cdot P^t = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T & G & M \end{array} \\ \begin{pmatrix} 50 & 40 & 35 \\ 0 & 60 & 55 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ Precio \\ Precio \\ Precio \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 40 & 34 \\ 38 & 37 \\ 42 & 40 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 4990 & 4580 \\ 4590 & 4420 \end{pmatrix}$$

La diagonal principal indica el dinero ganado en cada finca. El elemento a_{11} es el dinero conseguido por todos los tipos de uva en la finca 1, es decir, $4.990.000\ céntimos = 49.900$ €. El elemento a_{22} es el dinero conseguido por todos los tipos de uva en la finca 2, es decir, $4.420.000\ céntimos = 44.200$ €

Total de dinero: $49900 + 44200 = 94.100$ €

b.1) $M \cdot X + N = V \Rightarrow M \cdot X = V - N \Rightarrow X = M^{-1}(V - N)$

b.2) Calculamos la matriz inversa de *M*

$$M^{-1} = \frac{(M^{adj})^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = M^{-1}(V-N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una conservera fabrica latas de pisto con tomate, cebolla y pimiento siguiendo dos recetas distintas. La matriz $\begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 \\ 600 & 100 & 300 \end{pmatrix}$ indica los gramos necesarios de cada producto para conseguir una lata de cada receta. Se dispone de dos proveedores, siendo la matriz de precios en euros por kilo de cada producto $\begin{pmatrix} 0'5 & 0'4 & 0'6 \\ 0'4 & 0'5 & 0'7 \end{pmatrix}$. Los costes de producción de cada receta en euros por lata vienen dados por la matriz $(0'11 \quad 0'09)$. Los costes de transporte en euros por lata según cada proveedor vienen dados por la matriz $(0'02 \quad 0'03)$. La conservera quiere obtener un beneficio de 5 céntimos por lata. Una distribuidora compra 11000 latas de la primera receta, siendo 5000 del primer proveedor, y otras 11000 de la segunda receta, siendo 6000 del primer proveedor. ¿Cuánto debe cobrar la conservera por el pedido de esta distribuidora.

SOCIALES II. 2023 RESERVA 2. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

Escribimos la matriz $\begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 \\ 600 & 100 & 300 \end{pmatrix}$ en kilogramos $\begin{pmatrix} 0'5 & 0'3 & 0'2 \\ 0'6 & 0'1 & 0'3 \end{pmatrix}$

Calculamos $\begin{array}{c} \\ \text{Re}ceta_1 \\ \text{Re}ceta_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T & C & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0'5 & 0'3 & 0'2 \\ 0'6 & 0'1 & 0'3 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ T \\ C \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P_1 & P_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0'5 & 0'4 \\ 0'4 & 0'5 \\ 0'6 & 0'7 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P_1 & P_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0'49 & 0'49 \\ 0'52 & 0'5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{Re}ceta_1 \\ \text{Re}ceta_2 \end{array}$

La receta 1 para el proveedor 1 cuesta 0’49 por lata
La receta 1 para el proveedor 2 cuesta 0’49 por lata
La receta 2 para el proveedor 1 cuesta 0’52 por lata
La receta 2 para el proveedor 2 cuesta 0’5 por lata

Sumamos los costes de transporte según proveedor y la producción por lata según receta

$$(0'02 \quad 0'03) \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P_1 & P_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0'02 & 0'03 \\ 0'02 & 0'03 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (0'11 \quad 0'09) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0'11 & 0'11 \\ 0'09 & 0'09 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{Re}ceta_1 \\ \text{Re}ceta_2 \end{array}$$

Luego: $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P_1 & P_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0'49+0'02+0'11 & 0'49+0'03+0'11 \\ 0'52+0'02+0'09 & 0'5+0'03+0'09 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{Re}ceta_1 \\ \text{Re}ceta_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P_1 & P_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0'62 & 0'63 \\ 0'63 & 0'62 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{Re}ceta_1 \\ \text{Re}ceta_2 \end{array}$

11.000 latas de receta 1: $5000 \cdot 0'62 + 6000 \cdot 0'63 = 6.880$ €
11.000 latas de receta 2: $6000 \cdot 0'63 + 5000 \cdot 0'62 = 6.880$ €
Total: 13.760 €
Pero como la conservera quiere obtener un beneficio por lata de 5 céntimos: $22000 \cdot 0'05 = 1100$ €
La conservera debe cobrar a la distribuidora: $13760 + 1100 = 14.860$ €

a) Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & m & -2\\ 1 & m & 4\end{pmatrix}$

a.1) Obtenga para qué valores de m la matriz A tiene inversa.

a.2) Calcule, en caso de existir, la inversa de A para $m=1$.

b) Despeje y simplifique X en la ecuación $X\cdot B-B^2+B=O$, sabiendo que la matriz B es invertible.

SOCIALES II. 2023 RESERVA 3. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de *A*.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & m & -2\\ 1 & m & 4\end{vmatrix}=4m+2+2m=6m+2=0\Rightarrow m=-\frac{1}{3}$$

Luego, la matriz *A* tiene inversa para todos los valores de $m\neq-\frac{1}{3}$.

b) Calculamos la inversa para $m=1$

$$A^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}6 & -2 & -1\\ 4 & 4 & -2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}^t}{8}=\frac{\begin{pmatrix}6 & 4 & 2\\ -2 & 4 & 2\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}}{8}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$$

b) Despejamos y simplificamos la matriz *X*

$$X\cdot B-B^2+B=O\Rightarrow X\cdot B=B^2-B\Rightarrow X\cdot B\cdot B^{-1}=B^2\cdot B^{-1}-B\cdot B^{-1}\Rightarrow X=B-I$$

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 \\ -2 & 0 & 11 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$**.**

a) Halle las dimensiones de las siguientes matrices: $C^t \cdot A \cdot C$ **,** $A \cdot C \cdot C^t \cdot B$

b) Calcule, en caso de existir, las matrices inversas de A **y** B**.**

c) Resuelva el siguiente sistema matricial $\begin{cases} 2X+3Y=A \\ -3X+4Y=B \end{cases}$**.**

SOCIALES II. 2023 RESERVA 4. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

a) $C^t \cdot A \cdot C = (1,3)\cdot(3,3)\cdot(3,1)=(1,3)\cdot(3,1)=(1,1)$

$A\cdot C\cdot C^t \cdot B=(3,3)\cdot(3,1)\cdot(1,3)\cdot(3,3)=(3,1)\cdot(1,3)\cdot(3,3)=(3,3)\cdot(3,3)=(3,3)$

b) Calculamos el determinante: $|A|=\begin{vmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}=126-49-60=17 \Rightarrow$ Si tiene inversa

Calculamos la inversa

$$A^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -12 & 7 & 21 \\ 11 & -5 & -15 \\ -28 & 22 & 49 \end{pmatrix}^t}{17}=\frac{\begin{pmatrix} -12 & 11 & -28 \\ 7 & -5 & 22 \\ 21 & -15 & 49 \end{pmatrix}}{17}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix} -12 & 11 & -28 \\ 7 & -5 & 22 \\ 21 & -15 & 49 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante: $|B|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -9 \\ -2 & 0 & 11 \\ 0 & 4 & -7 \end{vmatrix}=72-28-44=0 \Rightarrow$ No tiene inversa

c) Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 2X+3Y=A \\ -3X+4Y=B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6X+9Y=3A \\ -6X+8Y=2B \end{cases} \Rightarrow 17Y=3A+2B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y=\frac{3A+2B}{17}=\frac{\begin{pmatrix} 15 & -21 & 18 \\ 21 & 0 & 12 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 4 & -18 \\ -4 & 0 & 22 \\ 0 & 8 & -14 \end{pmatrix}}{17}=\frac{\begin{pmatrix} 17 & -17 & 0 \\ 17 & 0 & 34 \\ 0 & 17 & -17 \end{pmatrix}}{17}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X=\frac{A-3Y}{2}=\frac{\begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}}{2}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Pruebe que se verifica que: $A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)$.

b) Dada la ecuación matricial $X^t\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, **determine la dimensión de** X **y resuelva la ecuación.**

SOCIALES II. 2023 JULIO. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la inversa de A

$$A^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^t}{2}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos

$$\left(A^2-4A+5I_3\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego, vemos que efectivamente se cumple que: $A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)$

b) Para que se pueda hacer $X^t\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, la matriz X^t tiene que ser de dimensión (2,3), luego la matriz X será de dimensión (3,2)

Resolvemos la ecuación:

$$X^t\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow X^t\cdot A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot A^{-1}\Rightarrow X^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot A^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$