EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2023

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 6
- Reserva 1, Ejercicio 6
- Reserva 2, Ejercicio 5
- Reserva 3, Ejercicio 5
- Reserva 4, Ejercicio 5
- Julio, Ejercicio 5

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Determina para qué valores de *m* existe la inversa de la matriz *A*.
b) Para todo $m \neq -1$, resuelve, si es posible, la ecuación $A\cdot X + X = B$
MATEMÁTICAS II. 2023. JUNIO. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz *A* tiene inversa si su determinante es distinto de cero, luego:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{vmatrix}=m^3=0 \Rightarrow m=0$$

Por lo tanto, la matriz *A* tendrá inversa para todos los valores de $m \neq 0$.

b) Resolvemos la ecuación matricial y calculamos la matriz *X*.

$$A\cdot X+X=B \Rightarrow (A+I)\cdot X=B \Rightarrow (A+I)^{-1}\cdot(A+I)\cdot X=(A+I)^{-1}B \Rightarrow X=(A+I)^{-1}B$$

Calculamos la matriz $A+I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos su inversa

$$(A+I)^{-1}=\frac{((A+I)^{adj})^t}{|A+I|}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m^2 & 1 & -m \\ -m & m^2 & 1 \end{pmatrix}^t}{m^3+1}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix}}{m^3+1}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{m^3+1} & \frac{m^2}{m^3+1} & -\frac{m}{m^3+1} \\ -\frac{m}{m^3+1} & \frac{1}{m^3+1} & \frac{m^2}{m^3+1} \\ \frac{m^2}{m^3+1} & -\frac{m}{m^3+1} & \frac{1}{m^3+1} \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz *X*.

$$X=(A+I)^{-1}B=\begin{pmatrix} \frac{1}{m^3+1} & \frac{m^2}{m^3+1} & -\frac{m}{m^3+1} \\ -\frac{m}{m^3+1} & \frac{1}{m^3+1} & \frac{m^2}{m^3+1} \\ \frac{m^2}{m^3+1} & -\frac{m}{m^3+1} & \frac{1}{m^3+1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{m^3+1} & -\frac{m}{m^3+1} & \frac{m^2}{m^3+1} \\ -\frac{m}{m^3+1} & \frac{m^2}{m^3+1} & \frac{1}{m^3+1} \\ \frac{m^2}{m^3+1} & \frac{1}{m^3+1} & -\frac{m}{m^3+1} \end{pmatrix}$$

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3m & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de m para los que la matriz A tenga inversa.

b) Calcula para $m = 1$, si es posible, la matriz X tal que $A \cdot X = B^t$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 1. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de *A*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2m & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3m & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12m^2 - 12m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

Luego, tiene inversa para los valores de $m \neq \dfrac{3 \pm 2\sqrt{3}}{6}$

b) Calculamos la inversa de *A* para $m = 1$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -5 & -1 & -7 \\ -4 & -1 & -6 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -7 & -6 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz *X*: $A \cdot X = B^t \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B^t$

Calculamos la matriz *X*.

$$X = A^{-1} \cdot B^t = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 37 \\ 2 & 3 & 9 \\ 8 & 20 & 53 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{10}

b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de $I+A+A^2$, donde I denota la matriz identidad de orden 3

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 2. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego: $A^{10}=A^3\cdot A^3\cdot A^3\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b)

$$B=I+A+A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a & ab-b \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{(B^{adj})^t}{|B|}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ b & -b & 1 \end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & -a & b \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} 1 & -a & b \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} m+1 & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula m **para que la matriz** A **tenga inversa.**

b) Para $m=0$**, resuelve, si es posible, la ecuación matricial** $\frac{1}{2}A\cdot X+C^4=B$

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 3. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz A tiene inversa si su determinante es distinto de cero, luego:

$$|A|=\begin{vmatrix} m+1 & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & m+1 \end{vmatrix}=4m-4=0\Rightarrow m=1$$

Por lo tanto, la matriz A tendrá inversa para todos los valores de $m\neq 1$.

b) Resolvemos la ecuación matricial y calculamos la matriz X.

$$\frac{1}{2}A\cdot X+C^4=B\Rightarrow A\cdot X=2(B-C^4)\Rightarrow X=2A^{-1}\cdot(B-C^4)$$

Calculamos la inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^t}{-4}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}}{-4}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos C^4: $C^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I\Rightarrow C^4=I\cdot I=I$

Calculamos la matriz X.

$X=2A^{-1}\cdot(B-C^4)=$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$**, calcula, si es posible, la matriz** X **que verifica la ecuación** $3X - B^t = AX$ **, siendo** B^t **la matriz traspuesta de** B
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 4. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

Despejamos la matriz X: $3X - B^t = AX \Rightarrow 3X - AX = B^t \Rightarrow (3I - A)X = B^t \Rightarrow X = (3I - A)^{-1} \cdot B^t$

Calculamos la matriz

$$C = 3I - A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa

$$C^{-1} = \frac{(C^{adj})^t}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ -2 & 12 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X = (3I - A)^{-1} \cdot B^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -11 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) Halla los valores de m para que la matriz $A-mI$ no tenga inversa.

b) Halla x, distinto de cero, para que $A-xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A-I)$

MATEMÁTICAS II. 2023. JULIO. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A-mI=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}m&0&0\\0&m&0\\0&0&m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-m&1&1\\1&1-m&1\\1&1&1-m\end{pmatrix}$

Calculamos su determinante

$$|A-mI|=\begin{vmatrix}1-m&1&1\\1&1-m&1\\1&1&1-m\end{vmatrix}=-m^3+3m^2=0\Rightarrow m=0\ ;\ m=3$$

Luego, la matriz $A-mI$ no tiene inversa para $m=0$ y $m=3$, ya que su determinante vale 0.

b) Calculamos la inversa de la matriz $B=\frac{1}{x}(A-I)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{x}&\frac{1}{x}\\\frac{1}{x}&0&\frac{1}{x}\\\frac{1}{x}&\frac{1}{x}&0\end{pmatrix}$

Calculamos su inversa

$$B^{-1}=\frac{(B^{adj})^t}{|B|}=\frac{\begin{pmatrix}-\frac{1}{x^2}&\frac{1}{x^2}&\frac{1}{x^2}\\\frac{1}{x^2}&-\frac{1}{x^2}&\frac{1}{x^2}\\\frac{1}{x^2}&\frac{1}{x^2}&-\frac{1}{x^2}\end{pmatrix}^t}{\frac{2}{x^3}}=\frac{\begin{pmatrix}-\frac{1}{x^2}&\frac{1}{x^2}&\frac{1}{x^2}\\\frac{1}{x^2}&-\frac{1}{x^2}&\frac{1}{x^2}\\\frac{1}{x^2}&\frac{1}{x^2}&-\frac{1}{x^2}\end{pmatrix}}{\frac{2}{x^3}}=\begin{pmatrix}-\frac{x}{2}&\frac{x}{2}&\frac{x}{2}\\\frac{x}{2}&-\frac{x}{2}&\frac{x}{2}\\\frac{x}{2}&\frac{x}{2}&-\frac{x}{2}\end{pmatrix}$$

$$A-xI=\begin{pmatrix}1-x&1&1\\1&1-x&1\\1&1&1-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{x}{2}&\frac{x}{2}&\frac{x}{2}\\\frac{x}{2}&-\frac{x}{2}&\frac{x}{2}\\\frac{x}{2}&\frac{x}{2}&-\frac{x}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}1-x=-\frac{x}{2}\\1=\frac{x}{2}\end{cases}\Rightarrow x=2$$