PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2023

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 5
- Reserva 1, Ejercicio 5
- Reserva 2, Ejercicio 6
- Reserva 3, Ejercicio 6
- Reserva 6, Ejercicio 6
- Julio, Ejercicio 6

Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El 60% de los coches blancos más el 50% de los coches negros representan el 30% de los coches vendidos. El 20% de los coches blancos junto con el 60% de los coches negros y el 60% de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendidos de cada color.
MATEMÁTICAS II. 2023. JUNIO. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

Planteamos un sistema de ecuaciones.

x = número de coches blancos vendidos
y = número de coches negros vendidos
z = número de coches rojos vendidos

$$\left.\begin{array}{r} 0'6x+0'5y=0'3\cdot(x+y+z) \\ 0'2x+0'6y+0'6z=0'5\cdot(x+y+z) \\ y=x+100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 6x+5y=3\cdot(x+y+z) \\ 2x+6y+6z=5\cdot(x+y+z) \\ y=x+100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y-3z=0 \\ -3x+y+z=0 \\ -x+y=100 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema por Gauss

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 100 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2+3F_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 5 & -3 & 300 \\ 0 & -2 & 1 & -300 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_3+F_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 5 & -3 & 300 \\ 0 & -1 & 0 & -600 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+y= 100 \\ 5y-3z= 300 \\ -y=-600 \end{array}\right\} \rightarrow x=500 \ ; \ \ y=600 \ ; \ \ z=900$$

Una fábrica dispone de tres líquidos L_1, L_2 y L_3, en los que se encuentran disueltas dos sustancias: sodio y magnesio. Cada litro del líquido L_1 contiene 120 mg de sodio y 90 mg de magnesio, cada litro del líquido L_2 contiene 100 mg de sodio y 90 mg de magnesio y cada litro del líquido L_3 contiene 60 mg de sodio y 180 mg de magnesio. ¿Es posible obtener un litro de un liquido mezclando distintas cantidades de L_1, L_2 y L_3 en el que la cantidad de sodio y de magnesio sea de 100 mg cada una ¿. En caso afirmativo, calcula dichas cantidades.
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 1. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

Hacemos una tabla con los datos del problema

	Sodio(mg)	Magnesio(mg)
$x = litros\ de\ L_1$	120	90
$y = litros\ de\ L_2$	100	90
$z = litros\ de\ L_3$	60	180
Total	100	100

Planteamos el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{aligned} x+y+z=1 \\ 120x+100y+60z=100 \\ 90x+90y+180z=100 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z=1 \\ 6x+5y+3z=5 \\ 9x+9y+18z=10 \end{aligned}\right\}$

Vamos a resolverlo por Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 3 & 5 \\ 9 & 9 & 18 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-6F_1 \\ F_3-9F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \end{pmatrix} \to \left.\begin{aligned} x+y+z=1 \\ -y-3z=-1 \\ 9z=1 \end{aligned}\right\} \to x=\frac{2}{9}\ ;\ y=\frac{2}{3}\ ;\ z=\frac{1}{9}$$

Luego, si es posible obtener la mezcla pedida, mezclando $\frac{2}{9}$ de litro de L_1, $\frac{2}{3}$ de litro de L_2 y $\frac{1}{9}$ de litro de L_3

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, se define la matriz $M=A+(\lambda-1)B$

a) Halla los valores de λ para los que la matriz M tiene rango menor que 3.
b) Para $\lambda=-1$, resuelve el sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es M.
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 2. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz M

$$M=A+(\lambda-1)B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}+(\lambda-1)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\lambda-1\\0&\lambda-1&0\\\lambda-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&\lambda-1\\1&\lambda-1&1\\\lambda-1&1&1\end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante y lo igualamos a cero.

$$|M|=-\lambda^3+3\lambda^2-4=0\Rightarrow\lambda=2\ ;\ \lambda=-1$$

Luego, para $\lambda=2$ y $\lambda=-1$, el rango de M es menor que 3.

b) El sistema que tenemos que resolver es: $\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Como el $Rango(M)=2$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{aligned}x+y-2z=0\\x-2y+z=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=t\ ;\ y=t\ ;\ z=t$$

EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & x \\ z & z & y \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\quad$ **y** $\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

a) Discute el sistema $B\cdot A=C$ según los valores de α.
b) Resuelve el sistema, si es posible, para $\alpha=0$ y para $\alpha=1$.
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 3. EJERCICIO 6.

R E S O L U C I Ó N

a) Escribimos el sistema: $B\cdot A=C\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & x \\ z & z & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\alpha x+y+z=1\\ x+\alpha y+z=1\\ x+y+\alpha z=1\end{matrix}\right\}$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 1\\ 1 & 1 & \alpha\end{vmatrix}=\alpha^3-3\alpha+2=0\Rightarrow\alpha=1 \ y\ \alpha=-2$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $\alpha=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=1$

Para $\alpha=1\Rightarrow M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow R(M)=1$

Para $\alpha=-2\Rightarrow A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=2,\ ya\ que\ \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=3\neq 0$

Para $\alpha=-2\Rightarrow M=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow R(M)=3,\ ya\ que\ \begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=9\neq 0$

	R(A)	R(M)	
$\alpha=1$	1	1	Sistema compatible indeterminado
$\alpha=-2$	2	3	Sistema incompatible
$\alpha\neq 1\ y\ -2$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $\alpha = 0$, el sistema que tenemos que resolver es: $\left.\begin{array}{r} y+z=1 \\ x+z=1 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$. Lo resolvemos por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2} \ ; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2} \ ; \ z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

Para $\alpha = 1$, el sistema que tenemos que resolver es: $\left. x+y+z=1 \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1-\lambda-\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array} \right.$

Una plataforma de streaming se especializa en series de tres géneros: animación, ciencia ficción y comedia. Se sabe que el 30% de las series de animación más el 50% de las de ciencia ficción coincide con el 20% de total de series. El 25% de las series de animación más el 50% de las de ciencia ficción más el 60% de las de comedia representan la mitad del total de series. Hay 100 series menos de animación que de ciencia ficción. Halla el número de series de cada género.
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 4. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

Llamamos $x =$ series de animación
$y =$ series de ciencia ficción
$z =$ series de comedia

Planteamos el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 0'3x+0'5y=0'2(x+y+z) \\ 0'25x+0'5y+0'6z=0'5(x+y+z) \\ x+100=y \end{array}\right\}$

Vamos a resolverlo

$$\left.\begin{array}{r} 0'1x+0'3y-0'2z=0 \\ -0'25x+0'1z=0 \\ x+100=y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 0'1x+0'3(100+x)-0'2z=0 \\ -0'25x+0'1z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 0'4x-0'2z=-30 \\ -0'25x+0'1z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 0'4x-0'2z=-30 \\ -0'5x+0'2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -0'1x=-30 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=300 \\ y=400 \\ z=750 \end{array}\right.$$

El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe de 500 euros sin incluir impuestos. El gasto en vino es de 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos. Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6%, el 12% y el 30%, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592'4 euros. Calcula el importe, incluyendo impuestos, invertido en cada una de las bebidas.
MATEMÁTICAS II. 2023. JULIO. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

Planteamos un sistema de ecuaciones.

x = importe en refrescos sin impuestos
y = importe en cerveza sin impuestos
z = importe en vino sin impuestos

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=500 \\ x+y-60=z \\ 0'06x+0'12y+0'3z=92'4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=500 \\ x+y-z=60 \\ x+2y+5z=1540 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema por Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 1 & 1 & -1 & 60 \\ 1 & 2 & 5 & 1540 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 0 & -2 & -440 \\ 0 & 1 & 4 & 1040 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z= \ 500 \\ -2z=-440 \\ y+4z= \ 1040 \end{array}\right\} \rightarrow x=120 \ ; \ y=160 \ ; \ z=220$$

Luego, el importe invertido en cada bebida incluyendo impuestos es:

Refrescos: $120 \cdot 1'06 = 127'2$ €
Cerveza: $160 \cdot 1'12 = 179'2$ €
Vino: $220 \cdot 1'3 = 286$ €