PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2023

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 7
- Junio, Ejercicio 8
- Reserva 1, Ejercicio 7
- Reserva 1, Ejercicio 8
- Reserva 2, Ejercicio 7
- Reserva 2, Ejercicio 8
- Reserva 3, Ejercicio 7
- Reserva 3, Ejercicio 8
- Reserva 4, Ejercicio 7
- Reserva 4, Ejercicio 8
- Julio, Ejercicio 7
- Julio, Ejercicio 8

El plano perpendicular al segmento de extremos $P(0,3,8)$ y $Q(2,1,6)$ que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos *A*, *B* y *C*. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos *A*, *B* y *C*.
MATEMÁTICAS II. 2023. JUNIO. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el punto medio del segmento *PQ*: $M = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{8+6}{2}\right) = (1,2,7)$

El vector $\overrightarrow{PQ} = (2,-2,-2)$ es el vector normal del plano, luego: $2x-2y-2z+D=0$

De todos esos planos nos interesa el que pasa por el punto *M*, por lo tanto:

$$2\cdot 1-2\cdot 2-2\cdot 7+D=0 \Rightarrow D=16 \Rightarrow 2x-2y-2z+16=0 \Rightarrow x-y-z+8=0$$

Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados: $A=(-8,0,0)$; $B=(0,8,0)$; $C=(0,0,8)$. Calculamos los vectores $\vec{AB}=(8,8,0)$ y $\vec{AC}=(8,0,8)$.

Hacemos el producto vectorial de los vectores: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 64\,\vec{i} - 64\,\vec{j} - 64\,\vec{k}$

Área del triángulo = $\frac{1}{2}\,\textit{módulo}\left(\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{64^2+64^2+64^2} = \frac{\sqrt{12288}}{2} = \frac{64\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}\ u^2$

Considera el punto $A(-1,1,3)$ y la recta r determinada por los puntos $B(2,1,1)$ y $C(0,1,-1)$
a) Halla la distancia del punto A a la recta r.
b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.
MATEMÁTICAS II. 2023. JUNIO. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) La recta es: $r \equiv \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 1 \\ z = 1-2t \end{cases}$

El vector director de la recta $\vec{BC} = (-2,0,-2)$ es el vector normal de un plano perpendicular a ella, luego: $-2x-2z+D=0$

Calculamos el que pasa por el punto A.

$$-2\cdot(-1)-2\cdot 3+D=0 \Rightarrow D=4 \Rightarrow -2x-2z+4=0 \Rightarrow x+z-2=0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano

$$x+z-2=0 \Rightarrow 2-2t+1-2t-2=0 \Rightarrow t=\frac{1}{4}$$

Luego, el punto de corte es: $M = \left(2-2\cdot\frac{1}{4},1,1-2\cdot\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\right)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector $\vec{AM} = \left(\frac{5}{2},0,-\frac{5}{2}\right)$, es decir:

$$\left|\vec{AM}\right| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+(0)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\ u$$

b) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(3,0,-2)$ y $\vec{AC}=(1,0,-4)$.

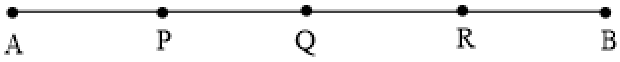
Hacemos el producto vectorial de los vectores: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 10\,\vec{j} = (0,10,0)$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}\ \textit{módulo}\left(\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{(0)^2+(10)^2+(0)^2} = 5\ u^2$$

Considera los puntos $A(1,-2,3)$ y $B(2,0,-1)$.
a) Halla los puntos que dividen al segmento *AB* en cuatro partes iguales.
b) Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento *AB* y que pasa por el punto medio de dicho segmento.
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 1. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a)



El punto *Q* es el punto medio del segmento *AB*, luego:

$$Q=\left(\frac{1+2}{2},\frac{-2+0}{2},\frac{3-1}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},-1,1\right)$$

El punto *P* es el punto medio del segmento *AQ*, luego: $P=\left(\frac{1+\frac{3}{2}}{2},\frac{-2-1}{2},\frac{3+1}{2}\right)=\left(\frac{5}{4},-\frac{3}{2},2\right)$

El punto *R* es el punto medio del segmento *QB*, luego: $R=\left(\frac{\frac{3}{2}+2}{2},\frac{-1+0}{2},\frac{1-1}{2}\right)=\left(\frac{7}{4},-\frac{1}{2},0\right)$

b) El vector normal del plano es $\vec{AB}=(1,2,-4)$, luego, la ecuación de todos los planos perpendiculares al segmento *AB* es: $x+2y-4z+D=0$.

Como queremos el plano que pasa por el punto *Q*, se debe verificar que:

$$1\cdot\frac{3}{2}+2\cdot(-1)-4\cdot 1+D=0\Rightarrow D=\frac{9}{2}$$

Luego, el plano pedido es: $x+2y-4z+\frac{9}{2}=0\Rightarrow 2x+4y-8z+9=0$

Considera el plano $\pi \equiv x+y+z=0$ y la recta $r \equiv x-1=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{2}$. Halla la ecuación de un plano π', paralelo a π, tal que si *Q* y *Q'* son respectivamente los puntos de corte de la recta *r* con los planos π y π', entonces la distancia entre *Q* y *Q'* sea de 2 unidades.
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 1. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

π' tendrá de ecuación $\pi' \equiv x+y+z+D=0$ .Pasamos la recta a paramétricas

$r \equiv x-1=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=-1+2t \end{cases}$ y calculamos los puntos de corte con los planos

$$1+t+2t-1+2t=0 \Rightarrow 5t=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow Q=(1,0,-1)$$

$$1+t+2t-1+2t+D=0 \Rightarrow 5t=-D \Rightarrow t=-\frac{D}{5} \Rightarrow Q'=\left(\frac{5-D}{5},-\frac{2D}{5},\frac{-5-2D}{5}\right)$$

Calculamos la distancia entre los dos puntos:

$$d=2=\left|\overrightarrow{QQ'}\right|=\sqrt{\frac{D^2}{25}+\frac{4D^2}{25}+\frac{4D^2}{25}}=\frac{3|D|}{5} \Rightarrow \begin{cases} 2=\frac{3D}{5} \Rightarrow D=\frac{10}{3} \Rightarrow 3x+3y+3z+10=0 \\ 2=\frac{-3D}{5} \Rightarrow D=-\frac{10}{3} \Rightarrow 3x+3y+3z-10=0 \end{cases}$$

Luego, el plano que nos piden es: $\pi' \equiv 3x+3y+3z+10=0$ *ó* $\pi' \equiv 3x+3y+3z-10=0$

Considera el plano π, determinado por los puntos $A(-1,0,0)$, $B(0,1,1)$ y $C(2,1,0)$, y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x-2z-3=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}.$$

Halla los puntos de r cuya distancia a π es $\sqrt{14}$ unidades.

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 2. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

El plano viene definido por el punto A y los vectores $\vec{AB}=(1,1,1)$; $\vec{AC}=(3,1,0)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 3 \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = x-3y+2z+1=0$$

Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x-2z-3=0 \\ y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3+2t \\ y=2+t \\ z=t \end{cases}$

Calculamos la distancia

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3+2t-3\cdot(2+t)+2\cdot t+1|}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}}=\frac{|t-2|}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |t-2|=14\Rightarrow \begin{cases} t-2=14\Rightarrow t=16 \\ -t+2=14\Rightarrow t=-12 \end{cases}$$

Luego, los puntos son: $(35,18,16)$ y $(-21,-10,-12)$

Considera el paralelogramo cuyos vértices consecutivos son los puntos $P(-1,2,3)$, $Q(-2,1,0)$ $R(0,5,1)$ y *S*.

a) Halla las coordenadas del punto *S*.

b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos *P*, *Q* y *R*.

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 2. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) El punto medio de la diagonal *PR* es: $M=\left(\frac{-1+0}{2},\frac{2+5}{2},\frac{3+1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2},2\right)$

El punto medio de la diagonal *SQ*, también es *M*, luego si llamamos $S(a,b,c)$, se tiene que cumplir:

$$M=\left(\frac{-2+a}{2},\frac{1+b}{2},\frac{0+c}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2},2\right)\Rightarrow S(1,6,4)$$

b) Calculamos los vectores $\vec{PQ}=(-1,-1,-3)$ y $\vec{PR}=(1,3,-2)$, el vector normal del plano es:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=(11,-5,-2)$$

La recta que nos piden es: $\frac{x}{11}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{-2}$

Determina el punto simétrico de $A(2,-4,-3)$ con respecto al plano que contiene a los puntos $B(1,1,2)$, $C\left(0,\frac{1}{3},1\right)$ y $D(-3,0,3)$.

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 3. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los vectores $\vec{BC}=\left(-1,-\frac{2}{3},-1\right)$; $\vec{BD}=(-4,-1,1)$. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -4 \\ y-1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ z-2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{5}{3}x+5y-\frac{5}{3}z=0 \Rightarrow x-3y+z=0$$

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z+3}{1} \Rightarrow \begin{cases} x=2+t \\ y=-4-3t \\ z=-3+t \end{cases}$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano, sustituyendo la recta en la ecuación del plano

$$x-3y+z=0 \Rightarrow 2+t-3(-4-3t)-3+t=0 \Rightarrow 11+11t=0 \Rightarrow t=-1$$

luego, el punto es: $M=(2-1,-4+3,-3-1)=(1,-1,-4)$

Como el punto M es el punto medio del segmento AA', si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto A', se debe verificar que:

$$\frac{2+a}{2}=1 \Rightarrow a=0$$
$$\frac{-4+b}{2}=-1 \Rightarrow b=2$$
$$\frac{-3+c}{2}=-4 \Rightarrow c=-5$$

Luego el simétrico es: $A'=(0,2,-5)$

Dados los puntos $O(0,0,0)$, $A(2,-1,0)$ $B(3,0,x)$ y $C(-x,1,-1)$, los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ determinan un paralelepípedo.
a) Calcula los posibles valores de x sabiendo que el volumen del paralelepípedo es 5 unidades cúbicas.
b) para $x=1$, halla el área de la cara del paralelepípedo que contiene a los vértices O, A y B.
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 3. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) El paralelepípedo viene definido por los vectores: $\overrightarrow{OA}=(2,-1,0)$, $\overrightarrow{OB}=(3,0,x)$ y $\overrightarrow{OC}=(-x,1,-1)$ y su volumen es:

$$V=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & x \\ -x & 1 & -1 \end{vmatrix}=\left|x^2-3-2x\right|=5\Rightarrow\begin{cases} x^2-2x-8=0\Rightarrow\begin{cases} x=4 \\ x=-2\end{cases} \\ -x^2+2x-2=0\Rightarrow \textit{No tiene solución}\end{cases}$$

b) Calculamos los vectores $\overrightarrow{OA}=(2,-1,0)$ y $\overrightarrow{OB}=(3,0,1)$. El área de la cara viene dada por el módulo del vector producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, luego:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$$

$$\text{Área }=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(3)^2}=\sqrt{14}\ u^2$$

Determina los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+3y-1=0 \end{cases}$ que son equidistantes de los planos cartesianos *OYZ* y *OXZ*.
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 4. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas $r \equiv \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+3y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-3t \\ y=t \\ z=-1+4t \end{cases}$. Cualquier punto de la recta tiene de coordenadas: $A=(1-3t\,,\ t\ ,-1+4t)$.

La ecuación del plano *OYZ* es: $x=0$ y la ecuación del plano *OXZ* es: $y=0$

Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\frac{|1-3t|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\frac{|t|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} \Rightarrow |1-3t|=|t| \Rightarrow \begin{cases} 1-3t=t \Rightarrow t=\dfrac{1}{4} \\ 1-3t=-t \Rightarrow t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Luego, los puntos son: si $t=\frac{1}{4} \Rightarrow A=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},0\right)$; $t=\frac{1}{2} \Rightarrow A=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+z= & 1 \\ 3x-2z=-2 \end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano paralelo a *r* que contiene a la recta $-x+1=y=\dfrac{z-3}{2}$

b) Calcula la distancia entre la recta *r* y el plano $2x+5y+3z=41$**.**

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 4. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta *r* a paramétricas $r \equiv \begin{cases} x-y+z= & 1 \\ 3x-2z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}t \\ y=-\dfrac{5}{3}+\dfrac{5}{3}t \\ z=t \end{cases}$

La recta *r*, viene definida por el punto $A=\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{5}{3},0\right)$ y el vector director $\vec{u}=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3},1\right)$. La recta *s*, viene definida por el punto $(1,0,3)$ y el vector director.

El plano que nos piden viene definido por el punto *B* y los vectores $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$, luego su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -1 & \dfrac{2}{3} \\ y & 1 & \dfrac{5}{3} \\ z-3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7x+7y-7z+28=0 \Rightarrow x-y+z-4=0$$

b) Como la recta y el plano son perpendiculares, la distancia entre ambos es cero.

Considera los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y = 2$.

a) Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto $P(2,6,-2)$.

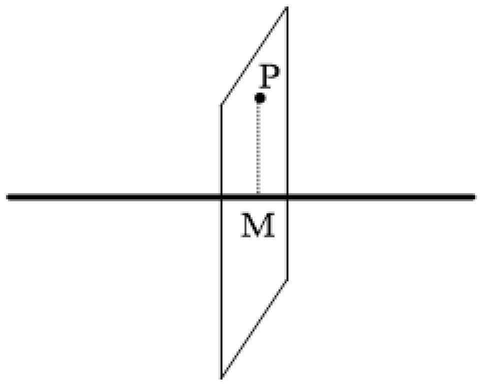
b) Halla el ángulo que forman π_1 y π_2.

MATEMÁTICAS II. 2023. JULIO. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$

Calculamos la ecuación de un plano perpendicular a r y que pasa por P



El vector normal del plano es el vector director de la recta r, luego: $-x + y + 2z + D = 0$ y queremos que pase por el punto P, por lo tanto:

$$(-1)\cdot 2 + 1\cdot 6 + 2\cdot(-2) + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow -x + y + 2z = 0$$

Calculamos el punto M de corte de la recta con el plano

$$-x + y + 2z = 0 \Rightarrow -(2-t) + t + 2\cdot(-2+2t) = 0 \Rightarrow 6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Luego, $M = (1,1,0)$

La distancia vendrá dada por el módulo del vector $\overrightarrow{PM} = (-1,-5,2)$

$$d = \left|\overrightarrow{PM}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{30} = 5'47\ u$$

b) Los vectores normales de los planos son: $\vec{n}_1 = (1,-1,1)$ y $\vec{n}_2 = (1,1,0)$. Aplicando la fórmula del ángulo de dos planos, tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 0}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}\cdot\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{0}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^{\circ}$$

Calcula el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos $A(0,2,-2)$, $B(3,2,1)$ y $C(2,3,2)$ con los planos cartesianos.
MATEMÁTICAS II. 2023. JULIO. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la ecuación del plano que viene definido por el punto $A(0,2,-2)$ y los vectores $\vec{AB}=(3,0,3)$ y $\vec{AC}=(2,1,4)$.

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 2 \\ y-2 & 0 & 1 \\ z+2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x-6y+3z+18=0 \Rightarrow x+2y-z-6=0$$

Calculamos los puntos de corte con loe ejes coordenados

Eje X$\Rightarrow x+2\cdot 0-1\cdot 0-6=0 \Rightarrow D(6,0,0)$
Eje Y$\Rightarrow 0+2\cdot y-1\cdot 0-6=0 \Rightarrow E(0,3,0)$
Eje Z$\Rightarrow 0+2\cdot 0-1\cdot z-6=0 \Rightarrow F(0,0,-6)$

El tetraedro viene definido por los vectores: $\overrightarrow{OD}=(6,0,0)$, $\overrightarrow{OE}=(0,3,0)$ y $\overrightarrow{OF}=(0,0,-6)$ y su volumen es:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 18\ u^3$$