EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2023

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1
- Junio, Ejercicio 2
- Reserva 1, Ejercicio 1
- Reserva 1, Ejercicio 2
- Reserva 2, Ejercicio 1
- Reserva 2, Ejercicio 2
- Reserva 3, Ejercicio 1
- Reserva 3, Ejercicio 2
- Reserva 4, Ejercicio 1
- Reserva 4, Ejercicio 2
- Julio, Ejercicio 1
- Julio, Ejercicio 2

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{e^{x}+e^{-x}}$

a) Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{2}f(x)\right)$.

MATEMÁTICAS II. 2023. JUNIO. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

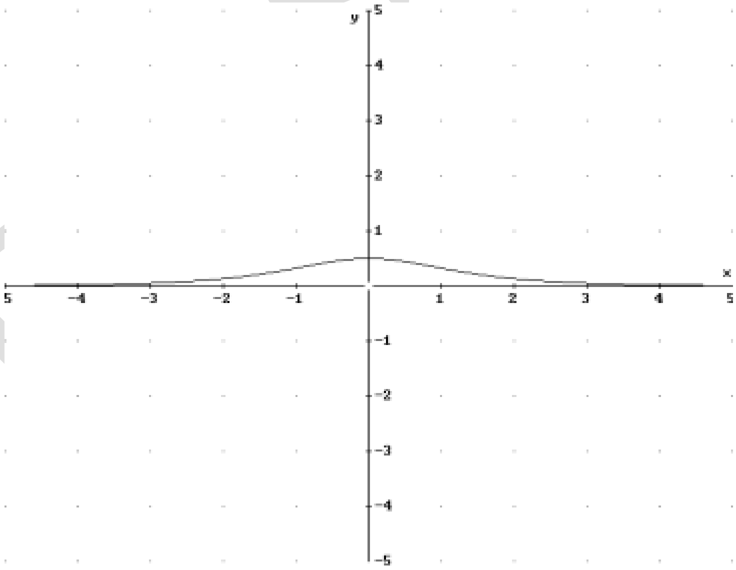
a) Calculamos la derivada y la igualamos a cero

$$f'(x)=\frac{0-(e^{x}-e^{-x})}{(e^{x}+e^{-x})^{2}}=\frac{e^{-x}-e^{x}}{(e^{x}+e^{-x})^{2}}=0\Rightarrow e^{-x}=e^{x}\Rightarrow x=0$$

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	–
Función	C	D

Luego en el punto $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ hay un máximo relativo y que también es máximo absoluto.

La función tiene una asíntota horizontal $y=0$, luego, no tiene mínimo absoluto.



b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{2}f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{L'Hopital}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{x}-e^{-x}}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{L'Hopital}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{2}{\infty}=0$$

Sea la función $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3-2x+5$

a) Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, f(-2))$ y $(2, f(2))$

b) Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de inflexión.

MATEMÁTICAS II. 2023. JUNIO. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos que nos dicen

$A=(-2, f(-2))=(-2,1)$ y $B=(2, f(2))=(2,9)$. Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}=(4,8)$. Luego, la pendiente de esta recta es: $m=\frac{8}{4}=2$

La pendiente de la recta tangente a la función que nos dan es: $f'(x)=3x^2-2$, igualando, tenemos que:

$$f'(x)=3x^2-2=2\Rightarrow 3x^2=4\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Luego, las abscisas de los puntos en que la recta tangente a la curva tiene de pendiente 2 son: $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) Calculamos el punto de inflexión

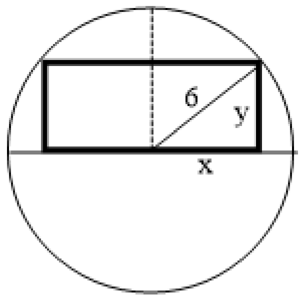
$$f''(x)=6x=0\Rightarrow x=0$$

Ecuación de la recta tangente: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Rightarrow y-5=-2\cdot(x-0)\Rightarrow y=-2x+5$

Ecuación de la recta normal: $y-f(0)=-\frac{1}{f'(0)}\cdot(x-0)\Rightarrow y-5=\frac{1}{2}\cdot(x-0)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+5$

Determina las longitudes de los lados de un rectángulo de área máxima que está inscrito en una semicircunferencia de 6 cm de radio, teniendo uno de sus lados sobre el diámetro de ella.
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 1. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máxima: $S_{\max} = 2x \cdot y$. Vemos que $0 \le x \le 6$ y que $0 \le y \le 6$

b) Relación entre las variables: $36 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$

$$S_{\max} = 2x \cdot y = 2x \cdot \sqrt{36 - x^2} = \sqrt{144x^2 - 4x^4}$$

c) Derivamos e igualamos a cero:

$$S'_{\max} = \frac{288x - 16x^3}{2\sqrt{144x^2 - 4x^4}} = 0 \Rightarrow 288x - 16x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3\sqrt{2} \end{cases}$$

d) Comprobamos que $x = 3\sqrt{2}$ corresponde a un máximo en el intervalo $[0, 6]$

$$S'_{\max}(2) = \frac{288x - 16x^3}{2\sqrt{144x^2 - 4x^4}} = \frac{448}{2\sqrt{512}} = 9'89 > 0 \text{ Creciente}$$

$$S'_{\max}(5) = \frac{288x - 16x^3}{2\sqrt{144x^2 - 4x^4}} = \frac{-560}{2\sqrt{1100}} = -8'44 < 0 \text{ Decreciente}$$

Luego, las dimensiones del rectángulo son base $= 2x = 6\sqrt{2}\, cm$; altura $= y = 3\sqrt{2}\, cm$

Sabiendo que $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x) - \ln(1+x)}{ax^2 - x + e^x - \cos(2x)} = -\frac{1}{7}$, calcula a (ln denota la función logaritmo neperiano)

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 1. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x) - \ln(1+x)}{ax^2 - x + e^x - \cos(2x)} = \frac{0}{0} \text{ Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x) - \ln(1+x)}{ax^2 - x + e^x - \cos(2x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \frac{1}{1+x}}{2ax - 1 + e^x + 2sen(2x)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'Hopital} = \lim_{x \to 0} \frac{-sen(x) + \frac{1}{(1+x)^2}}{2a + e^x + 4\cos(2x)} =$$

$$= \frac{1}{2a+1+4} = \frac{1}{2a+5} = -\frac{1}{7} \Rightarrow a = -6$$

Halla dos números mayores o iguales que 0, cuya suma sea 1, y el producto de uno de ellos por la raíz cuadrada del otro sea máximo.
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 2. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea máximo: $P_{\max} = x \cdot \sqrt{y}$.

b) Relación entre las variables: $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$P_{\max} = x \cdot \sqrt{1-x} = \sqrt{x^2 - x^3}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$P'_{\max} = \frac{2x - 3x^2}{2 \cdot \sqrt{x^2 - x^3}} = 0 \Rightarrow 2x - 3x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

e) Comprobamos que es un máximo

$$P'_{\max}\left(x = \frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3}} = 0'35 > 0 \Rightarrow \text{ Creciente}$$

$$P'_{\max}\left(x = \frac{3}{4}\right) = \frac{2 \cdot \frac{3}{4} - 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^3}} = -0'25 < 0 \Rightarrow \text{ Decreciente}$$

Luego, los números son: $x = \dfrac{2}{3}$; $y = \dfrac{1}{3}$

Considera la función $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x-b}$, para $x \neq b$.
a) Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(1,-2)$ y tenga a la recta $y=x+4$ como asíntota oblicua..
b) En el caso de $a=5$ y $b=4$, calcula la ecuación de la recta normal a la gráfica de f que pasa por el punto de abscisa $x=0$
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 2. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) Como f pasa por el punto $(1,-2)$ tenemos que $f(1)=-2 \Rightarrow \dfrac{1+a}{1-b}=-2 \Rightarrow a-2b=-3$.

Como f tiene una asíntota oblicua con pendiente 1, tenemos que:

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+a}{x-b}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+a-x^2+bx}{x-b}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a+bx}{x-b}\right)=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{1}\right)=b=4$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos que: $a-2b=-3 \Rightarrow a-8=-3 \Rightarrow a=5$

Luego, los valores son: $a=5$; $b=4$

b) Si $a=5$; $b=4$, la función es: $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x-4}$. La ecuación de la recta normal es:

$$y-f(0)=-\frac{1}{f'(0)}\cdot(x-0)$$

$$f(0)=-\frac{5}{4}$$

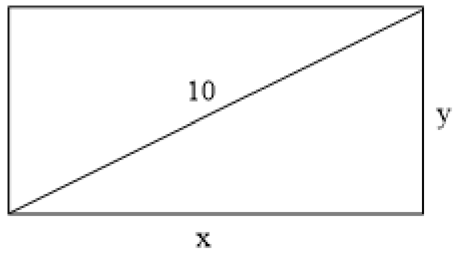
$$f'(x)=\frac{2x(x-4)-(1)\cdot(x^2+5)}{(x-4)^2}=\frac{x^2-8x-5}{(x-4)^2}\Rightarrow f'(0)=\frac{-5}{16}$$

Sustituyendo, tenemos que:

$$y-f(0)=-\frac{1}{f'(0)}\cdot(x-0)\Rightarrow y+\frac{5}{4}=-\frac{1}{-\frac{5}{16}}\cdot(x-0)\Rightarrow y=\frac{16}{5}x-\frac{5}{4}$$

De entre todos los rectángulos de diagonal 10 cm (cada una), calcula las dimensiones del que tiene mayor área.
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 3. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $S_{\max} = x \cdot y$

b) Relación entre las variables: $100 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max} = x \cdot \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100x^2 - x^4}$$

d) Derivamos e igualamos a cero:

$$S'_{\max} = \frac{200x - 4x^3}{2\sqrt{100x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{50} \end{cases}$$

e) Comprobamos que $x = \sqrt{50}\, cm$ es un máximo

$S'_{\max}(x=5) = \dfrac{200 \cdot 5 - 4 \cdot 5^3}{2\sqrt{100 \cdot 5^2 - 5^4}} = \dfrac{500}{86'6} > 0 \Rightarrow$ El área es creciente antes de $x = \sqrt{50}\, cm$

$S'_{\max}(x=8) = \dfrac{200 \cdot 8 - 4 \cdot 8^3}{2\sqrt{100 \cdot 8^2 - 8^4}} = -\dfrac{448}{96} < 0 \Rightarrow$ El área es decreciente después de $x = \sqrt{50}\, cm$

Luego, es un cuadrado de lado $x = \sqrt{50}\, cm$; $y = \sqrt{50}\, cm$

Considera la función $f(x)=\dfrac{1}{x\cdot|x|}$, para $|x|\neq 0$.

a) Calcula los intervalos de concavidad y de convexidad de f, así como los puntos de inflexión de su gráfica, si existen.
b) Estudia y calcula las asíntotas de la función. Esboza su gráfica.
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 3. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función: $f(x)=\dfrac{1}{x\cdot|x|}=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2} & si \quad x<0\\ \dfrac{1}{x^2} & si \quad x>0\end{cases}$

Calculamos la primera derivada: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3} & si \quad x<0\\ -\dfrac{2}{x^3} & si \quad x>0\end{cases}$

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x)=\begin{cases}-\dfrac{6}{x^4} & si \quad x<0\\ \dfrac{6}{x^4} & si \quad x>0\end{cases}$

Al igualar a cero, no sale ningún valor de *x*, por lo tanto, no tiene punto de inflexión.

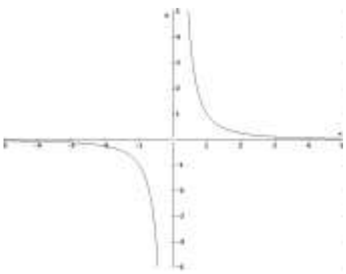
	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
Signo $f''(x)$	$-$	$+$
Función	Cn	Cx

Convexa en el intervalo: $(0,+\infty)$ y cóncava : $(-\infty,0)$

b) Asíntota vertical: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1}{x^2}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow x=0$ es una asíntota vertical

Asíntota horizontal: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-1}{x^2}=\dfrac{-1}{\infty}=0^-\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{\infty}=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow y=0$ es una asíntota horizontal

No tiene asíntota oblicua ya que tiene horizontal.



Sea $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)+a}{3x+4}$ (ln denota la función logaritmo neperiano).
a) Determina a sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x=0$ es 1.
b) Para $a=0$, estudia y calcula las asíntotas de f.
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 4. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada: $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x+1}(3x+4)-3\cdot\left[\ln(x+1)+a\right]}{(3x+4)^2}$

$$m=f'(0)=1\Rightarrow f'(0)=\frac{\frac{1}{0+1}(3\cdot 0+4)-3\cdot\left[\ln(0+1)+a\right]}{(3\cdot 0+4)^2}=1\Rightarrow\frac{4-3\cdot a}{16}=1\Rightarrow a=-4$$

b) Asíntota vertical: $x=-\dfrac{4}{3}$. Pero no está en su dominio

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{3x+4}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{3}=0\Rightarrow\ y=0$ es la asíntota horizontal.

Asíntota oblicua: No tiene, ya que tiene asíntota horizontal.

En una fábrica de pinturas, las latas que se utilizan para envasar la pintura tienen forma cilíndrica y una capacidad de 20 litros. Halla las dimensiones del cilindro, con tapas, para que la chapa empleada en su construcción sea mínima.
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 4. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea mínimo: $S_{\min} = 2\pi r h + 2\pi r^2$

b) Relación entre las variables: $20 = \pi r^2 h \Rightarrow h = \dfrac{20}{\pi r^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\min} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r \frac{20}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{40}{r} + 2\pi r^2$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\min} = -\frac{40}{r^2} + 4\pi r = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} = 1'47\ dm$$

e) Comprobamos que corresponde a un mínimo

$$S'_{\min}(r=1) = -\frac{40}{1^2} + 4\pi \cdot 1 = -27'43 < 0 \Rightarrow \text{ Decreciente}$$

$$S'_{\min}(r=2) = -\frac{40}{2^2} + 4\pi \cdot 2 = 15'13 > 0 \Rightarrow \text{ Creciente}$$

Luego, las dimensiones son: $r = 1'47\ dm$; $h = 2'94\ dm$

Sea la función $f:[-2,2\pi]\to\mathbb{R}$ **, definida por:** $f(x)=\begin{cases} 5x+1 & si \quad -2\le x\le 0 \\ e^{x}\cos(x) & si \quad 0<x\le 2\pi \end{cases}$

a) Halla los extremos relativos y absolutos de f **(abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).**

b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f **en el punto de abscisa** $x=\frac{\pi}{2}$**.**

MATEMÁTICAS II. 2023. JULIO. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=\begin{cases} 5 \\ e^{x}(\cos x-sen\,x) \end{cases} \; ; \; e^{x}(\cos x-sen\,x)=0\Rightarrow \begin{cases} e^{x}=0\Rightarrow No \\ \cos x-sen\,x=0\Rightarrow \cos x=sen\,x\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4} \\ x=\frac{5\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

	$(-2,0)$	$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$
Signo $f'(x)$	+	+	–	+
Función	C	C	D	C

La función tiene un máximo relativo en $\left(\frac{\pi}{4},1'55\right)$ y un mínimo relativo en $\left(\frac{5\pi}{4},-35'88\right)$.

Calculamos los valores que toma la función en sus extremos

$$f(-2)=-9$$
$$f(2\pi)=e^{2\pi}\cdot\cos 2\pi=e^{2\pi}=535'49$$

Luego, el máximo absoluto es $(2\pi,535'49)$ y el mínimo absoluto es $\left(\frac{5\pi}{4},-35'88\right)$

b) La ecuación de la recta tangente es: $y-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

Calculamos: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}-sen\frac{\pi}{2}\right)=-e^{\frac{\pi}{2}}$$

Sustituyendo, tenemos que: $y-0=-e^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow y=-e^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=x(\ln(x))^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).
a) Calcula, si existen, sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
b) Calcula, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
MATEMÁTICAS II. 2023. JULIO. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=1\cdot(\ln x)^2+2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x=(\ln x)^2+2\ln x=0\Rightarrow \ln x\cdot(\ln x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}\ln x=0\Rightarrow x=e^0=1\\ \ln x=-2\Rightarrow x=e^{-2}\end{cases}$$

	$(0,e^{-2})$	$(e^{-2},1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	−	+
Función	C	D	C

La función tiene un máximo relativo en $(e^{-2},4e^{-2})$ y un mínimo relativo en $(1,0)$.

b) El mínimo absoluto está en el punto $(1,0)$ y no tiene máximo absoluto