EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2023

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 3
- Junio, Ejercicio 4
- Reserva 1, Ejercicio 3
- Reserva 1, Ejercicio 4
- Reserva 2, Ejercicio 3
- Reserva 2, Ejercicio 4
- Reserva 3, Ejercicio 3
- Reserva 3, Ejercicio 4
- Reserva 4, Ejercicio 3
- Reserva 4, Ejercicio 4
- Julio, Ejercicio 3
- Julio, Ejercicio 4

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x|x-1|$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa $x=0$.
MATEMÁTICAS II. 2023. JUNIO. EJERCICIO 3

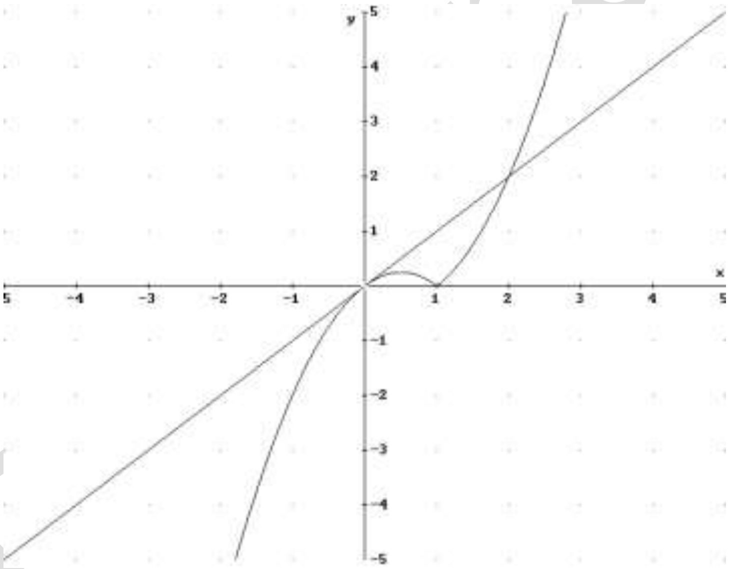
R E S O L U C I Ó N

Abrimos la función $f(x)=x|x-1|=\begin{cases} x(-x+1)=-x^2+x & si \ \ x\le 1 \\ x(x-1)=x^2-x & si \ \ x>1 \end{cases}$

Calculamos la recta tangente en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f'(x)=-2x+1 \Rightarrow f'(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Rightarrow y-0=1\cdot(x-0)\Rightarrow y=x$$

y hacemos el dibujo.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2-x \\ y=x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x=0 \ ; \ x=2$$

Calculamos el área que nos piden

$$A=A_1+A_2=\int_0^1\left[x-(-x^2+x)\right]dx+\int_1^2\left[x-(x^2-x)\right]dx=$$

$$=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2(-x^2+2x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_1^2=\frac{1}{3}+\left(-\frac{8}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)=1 \ u^2$$

Considera la función $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $F(x)=\int_0^x sen(t^2)\ dt$. Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot F(x)}{sen(x^2)}$.

MATEMÁTICAS II. 2023. JUNIO. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

$$F(0)=\int_0^0 sen(t^2)\,dt=0$$

Según el teorema fundamental del cálculo integral, si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, la función $F(x)$ definida por: $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ con $x\in[a,b]$ es derivable y ocurre que:

$$F'(x)=f(x)\Rightarrow F''(x)=f'(x)$$

En nuestro caso: $F'(x)=sen(x^2)\Rightarrow F''(x)=2x\cdot\cos(x^2)$, luego:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot F(x)}{sen(x^2)}=\frac{0}{0}\xrightarrow{L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot F(x)+x\cdot F'(x)}{2x\cdot\cos(x^2)}=\frac{0}{0}\xrightarrow{L'Hopital}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)+F'(x)+x\cdot F''(x)}{2\cdot\cos(x^2)-4x^2\cdot sen(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x^2)+sen(x^2)+x\cdot 2x\cdot\cos(x^2)}{2\cdot\cos(x^2)-4x^2\cdot sen(x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2sen(x^2)+2x^2\cdot\cos(x^2)}{2\cdot\cos(x^2)-4x^2\cdot sen(x^2)}=\frac{0+0}{2-0}=\frac{0}{2}=0$$

Calcula $\displaystyle\int_6^{12} \frac{dx}{9-x^2}$

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 1. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

Las raíces del denominador son: $x=3$; $x=-3$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{9-x^2}=\frac{-1}{x^2-9}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-3)}{x^2-9}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A*, *B* y *C* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$x=3\Rightarrow -1=6A\Rightarrow A=-\frac{1}{6}$$

$$x=-3\Rightarrow -1=-6B\Rightarrow B=\frac{1}{6}$$

Con lo cual:

$$\int_6^{12}\frac{1}{x^2-9}\,dx=\int_6^{12}\frac{-\frac{1}{6}}{x-3}\,dx+\int_6^{12}\frac{\frac{1}{6}}{x+3}\,dx=\left[-\frac{1}{6}\ln(x-3)+\frac{1}{6}\ln(x+3)\right]_6^{12}=$$

$$=\left(-\frac{1}{6}\ln(12-3)+\frac{1}{6}\ln(12+3)\right)-\left(-\frac{1}{6}\ln(6-3)+\frac{1}{6}\ln(6+3)\right)=$$

$$=-\frac{1}{6}\ln 9+\frac{1}{6}\ln 15+\frac{1}{6}\ln 3-\frac{1}{6}\ln 9=\frac{1}{6}\left(-\ln 9+\ln 15+\ln 3-\ln 9\right)=\frac{1}{6}\left(\ln 45-2\ln 9\right)=\frac{1}{6}\ln\frac{45}{81}=\frac{1}{6}\ln\frac{5}{9}$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2+1$

a) Determina el punto de la gráfica de *f* en el que la recta tangente es $y=4x-3$.

b) Haz un esbozo del recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta $y=4x-3$ y el eje de ordenadas. Calcula el área del recinto indicado.

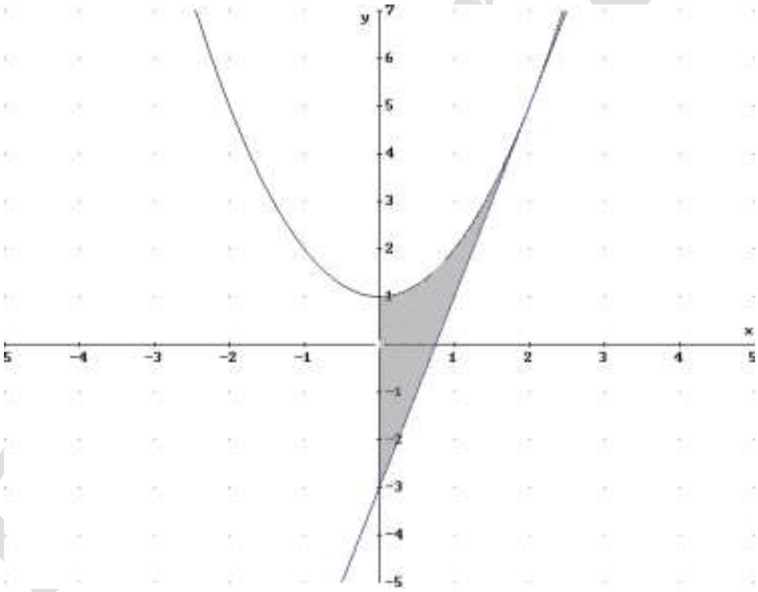
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 1. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función: $f(x)=x^2+1$

$$f'(x)=2x=m=4\Rightarrow x=2\Rightarrow \text{ el punto es: } (2,5)$$

b) Hacemos el dibujo



El área que nos piden es:

$$A=\int_0^2\left[(x^2+1)-(4x-3)\right]dx=\int_0^2\left[x^2-4x+4\right]dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+4x\right]_0^2=\left(\frac{8}{3}-8+8\right)-0=\frac{8}{3}\,u^2$$

Sabiendo que $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $F(x)=e^{x^2}$ es una primitiva de *f*.

a) Comprueba que *f* es creciente.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función *f*, el eje de abscisas y la recta $x=1$.

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 2. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

Como $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces: $f(x)=F'(x)=2x\cdot e^{x^2}$

Calculamos la derivada de $f(x)$

$f'(x)=2\cdot e^{x^2}+2x\cdot 2x\cdot e^{x^2}=e^{x^2}(2+4x^2)=0\Rightarrow 2+4x^2=0\Rightarrow$ No tiene solución

Luego, será creciente o decreciente en su dominio.

$$f'(0)=e^0(2+4\cdot 0)=2>0\Rightarrow \text{Creciente en su dominio}$$

b) Calculamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas

$$f(x)=2x\cdot e^{x^2}=0\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$$

Luego, el área que nos piden es:

$$A=\int_0^1 2x\cdot e^{x^2}\,dx=\left[e^{x^2}\right]_0^1=e^1-e^0=e-1\ u^2$$

Considera la función $f(x):[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\cos\left(\sqrt{x}\right)$.Calcula, si es posible, una primitiva de *f* cuya gráfica pase por el punto $(0,5)$. Sugerencia: haz el cambio $\sqrt{x}=t$
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 2. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular cuánto vale *dx*:

$$\sqrt{x}=t\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt\Rightarrow dx=2t\,dt$$

Hacemos la integral por partes. Sustituyendo, nos queda:

$$\int 2t\cdot\cos t\;dt=2t\cdot sen\,t-\int 2\,sen\,t\,dt=2t\cdot sen\,t+2\cos t+C=2\sqrt{x}\cdot sen\sqrt{x}+2\cos\sqrt{x}+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=2t;\;\; du=2\;dt \\ dv=\cos t\,dt;\; v=sen\,t \end{array}}$$

Como: $F(0)=5\Rightarrow 2\cdot 0\cdot sen\,0+2\cos 0+C=5\Rightarrow C=3$

Luego: $F(x)=2\sqrt{x}\cdot sen\sqrt{x}+2\cos\sqrt{x}+3$

Determina la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, sabiendo que es dos veces derivable, su gráfica pasa por el punto $(1,0)$, $f'(e)=e$ y $f''(x)=2\ln(x)+1$, para todo $x>0$ (ln denota la función logaritmo neperiano).
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 3. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

$$f'(x)=\int(2\ln x+1)\ dx=2\int\ln x\,dx+\int dx=2(x\ln x-x)+x=2x\ln x-x+C$$

Hacemos por partes la integral de $\ln x$

$$\int\ln x\ dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln x;\ du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

Como $f'(e)=e\Rightarrow 2e\cdot\ln e-e+C=e\Rightarrow C=0$

$$f(x)=\int 2x\ln x-x\ dx=2\int x\ln x\,dx-\int xdx$$

Hacemos por partes la integral de $x\ln x$

$$\int x\ln x\ dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln x;\ du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv=x\,dx;\ v=\frac{x^2}{2} \end{array}}$$

Luego: $f(x)=2\int x\ln x\,dx-\int xdx=2\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right)-\frac{x^2}{2}+D$

Como pasa por el punto $(1,0)$, tenemos que: $f(1)=0\Rightarrow 2\left(\frac{1^2}{2}\ln 1-\frac{1^2}{4}\right)-\frac{1^2}{2}+D=0\Rightarrow D=1$

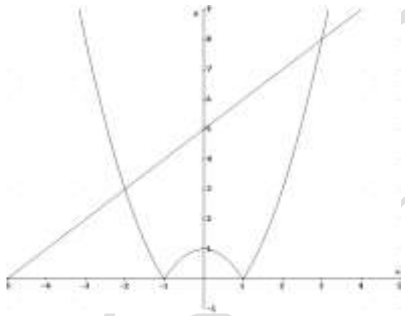
La función que nos piden es: $f(x)=2\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right)-\frac{x^2}{2}+1=x^2\ln x-x^2+1$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \left| x^2 - 1 \right|$ y $g(x) = x + 5$.

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que determinan.
b) Determina el área del recinto anterior.
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 3. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos la función $g(x) = x + 5$ que es una recta, haciendo una tabla de valores. Abrimos la función $f(x) = \left| x^2 - 1 \right| = \begin{cases} x^2 - 1 & si \ \ x \le -1 \\ -x^2 + 1 & si \ \ -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & si \ \ x \ge 1 \end{cases}$ y hacemos el dibujo.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 1 \\ g(x) = x + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 1 = x + 5 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \ ; \ x = -2$$

Luego, los puntos de corte son el $(-2,3)$ y $(3,8)$

b) Calculamos el área que nos piden

$$A = \int_{-2}^{-1} \left[(x+5) - (x^2 - 1) \right] dx + \int_{-1}^{1} \left[(x+5) - (-x^2 + 1) \right] dx + \int_{1}^{3} \left[(x+5) - (x^2 - 1) \right] dx =$$

$$= \int_{-2}^{-1} \left(-x^2 + x + 6 \right) dx + \int_{-1}^{1} \left(x^2 + x + 4 \right) dx + \int_{1}^{3} \left(-x^2 + x + 6 \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^{1} +$$

$$+ \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{1}^{3} = \left(-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 6(-1) \right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} + 6(-2) \right) +$$

$$+ \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 4 \cdot 1 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 4 \cdot (-1) \right) + \left(-\frac{(3)^3}{3} + \frac{(3)^2}{2} + 6 \cdot 3 \right) - \left(-\frac{(1)^3}{3} + \frac{(1)^2}{2} + 6(1) \right) =$$

$$= -\frac{31}{6} - \left(-\frac{22}{3} \right) + \frac{29}{6} - \left(-\frac{23}{6} \right) + \frac{27}{2} - \frac{37}{6} = \frac{109}{6} \ u^2$$

Calcula una primitiva de la función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=arc\,tg\left(\sqrt{x}\right)$ cuya gráfica pase por el punto $(0,1)$ (arc tg denota la función arco tangente). Sugerencia: efectúa el cambio $x=t^2$.
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 4. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

$x=t^2 \Rightarrow dx=2t\,dt$

$$F(x)=\int arc\,tg\left(\sqrt{x}\right)dx=\int arc\,tg\,t\cdot 2t\,dt=2\int t\,arc\,tg\,t\;dt$$

Calculamos la integral por partes

$$F(t)=\int t\,arc\,tg\,t\;dt=\frac{t^2}{2}arc\,tg\,t-\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{1+t^2}dx=\frac{t^2}{2}arc\,tg\,t-\frac{1}{2}\left[\int 1dt+\int\frac{-1}{1+t^2}dt\right]=$$
$$=\frac{t^2}{2}arc\,tg\,t-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}arc\,tg\,t+C$$

$$u=arc\,tg\,t;\;du=\frac{1}{1+t^2}\,dt$$
$$dv=t\,dt;\;v=\frac{t^2}{2}$$

$$F(x)=2\left[\frac{t^2}{2}arc\,tg\,t-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}arc\,tg\,t\right]=t^2\,arc\,tg\,t-t+arc\,tg\,t=x\,arc\,tg\,\sqrt{x}-\sqrt{x}+arc\,tg\,\sqrt{x}+C$$

Calculamos el valor de la constante C.

$$F(0)=0\cdot arc\,tg\,\sqrt{0}-\sqrt{0}+arc\,tg\,\sqrt{0}+C=1\Rightarrow C=1$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=x\,arc\,tg\,\sqrt{x}-\sqrt{x}+arc\,tg\,\sqrt{x}+1$

Considera la función $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\ln(x+1)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y la recta $x=e-1$.
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 4. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I_1=\int ln(x+1)\,dx$, que es una integral por partes.

$$u=\ln(x+1);\ du=\frac{1}{x+1}\,dx$$
$$dv=dx;\ v=x$$

$$I_1=\int ln(x+1)\,dx=x\cdot ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}dx=x\cdot ln(x+1)-I_2$$

La integral $I_2=\int\frac{x}{x+1}dx$ es una integral racional

$$I_2=\int\frac{x}{x+1}dx=\int\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)dx=x-ln(x+1)$$

Sustituyendo, nos queda: $I_1=\int ln(x+1)\,dx=x\cdot ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}dx=x\cdot ln(x+1)-x+ln(x+1)$

Una vez que hemos calculado la integral indefinida, ahora resolvemos la que nos proponía el problema.

$$A=\int_0^{e-1} ln(x+1)\,dx=\left[x\cdot ln(x+1)-x+\ln(x+1)\right]_0^{e-1}=1\ u^2$$

Calcula a con $0<a<1$, tal que $\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}\,dx+2=0$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

MATEMÁTICAS II. 2023. JULIO. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la expresión que nos dan

$$\int_a^1 \frac{\ln x}{x}\,dx+2=0 \Rightarrow \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_a^1+2=0 \Rightarrow \frac{(\ln 1)^2}{2}-\frac{(\ln a)^2}{2}+2=0 \Rightarrow -\frac{(\ln a)^2}{2}+2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\ln a)^2=4 \Rightarrow \begin{cases} \ln a=2 \Rightarrow a=e^2 \\ \ln a=-2 \Rightarrow a=e^{-2} \end{cases}$$

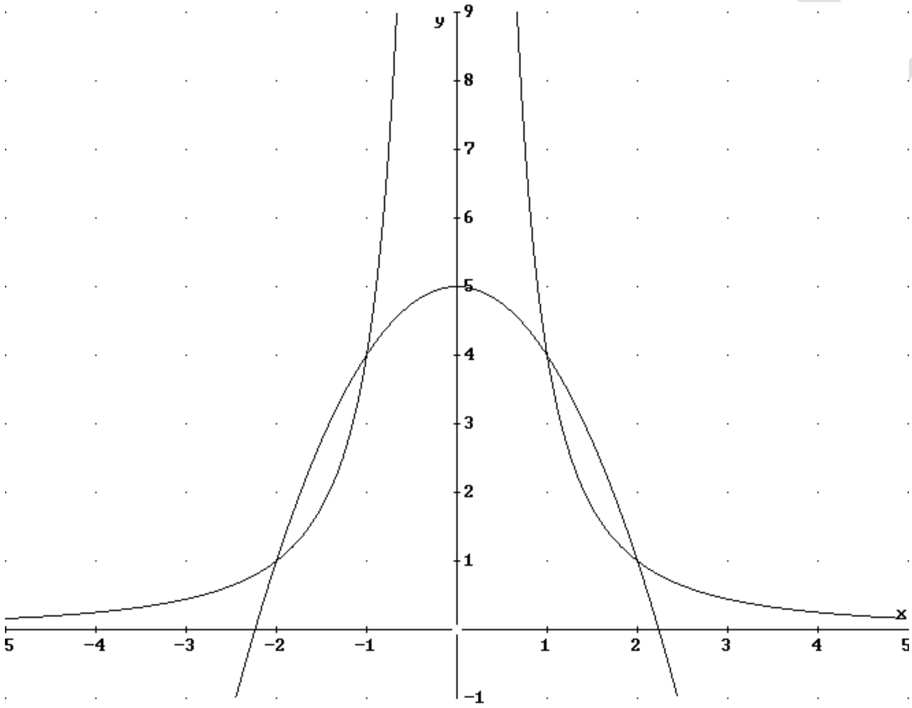
Como $0<a<1$, el valor de a es: $a=e^{-2}$

Considera las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=5-x^2$ y $g(x)=\dfrac{4}{x^2}$

a) Esboza las gráficas de las dos funciones y calcula los puntos de corte entre ellas.
b) Calcula la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2023. JULIO. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x)=5-x^2$ es una parábola fácil de dibujar. La función $g(x)=\dfrac{4}{x^2}$ es una hipérbola, la podemos dibujar dando 3 ó 4 valores a la derecha y a la izquierda de 0.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$5-x^2=\frac{4}{x^2}\Rightarrow x^4-5x^2+4=0$$

Es una ecuación bicuadrada.

$$t=x^2\Rightarrow t^2-5t+4=0\Rightarrow t=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases} t=4\Rightarrow x=\pm 2\\ t=1\Rightarrow x=\pm 1\end{cases}$$

Vemos que las dos funciones se cortan en los puntos $(-2,1)$, $(-1,4)$, $(1,4)$ y $(2,1)$

b) Como vemos en el dibujo el área de las dos regiones son iguales, luego el área pedida es:

$$A=2\int_1^2 (5-x^2-\frac{4}{x^2})\,dx=2\cdot\left[5x-\frac{x^3}{3}+\frac{4}{x}\right]_1^2=2\cdot\left[\left(10-\frac{8}{3}+2\right)-\left(5-\frac{1}{3}+4\right)\right]=\frac{4}{3}\,u^2$$