EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: MATRICES

- Junio, Ejercicio A1
- Reserva 1, Ejercicio A1
- Julio, Ejercicio A1

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, siendo a un número real.
a) Obtenga los valores de a para los que la matriz A tenga inversa.
b) Para $a=1$, resuelva la ecuación $X\cdot A-B=C\cdot A$
c) Determine razonadamente la dimensión de la matriz D que permite realizar la operación $B\cdot A+D\cdot C^t\cdot B$
SOCIALES II. 2024 JUNIO. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix}=-2a+10=0\Rightarrow a=5$$

Tiene inversa para todos los valores de $a\neq 5$

b) Despejamos la matriz X

$$X\cdot A-B=C\cdot A\Rightarrow X\cdot A=C\cdot A+B\Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=C\cdot A\cdot A^{-1}+B\cdot A^{-1}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow X=C+B\cdot A^{-1}$$

Calculamos la inversa para $a=1$

$$A^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^t}{8}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}}{8}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$X=C+B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

c) Calculamos la dimensión de la matriz D

$$B\cdot A+D\cdot C^t\cdot B\Rightarrow (1,3)\cdot(3,3)+(x,y)\cdot(3,1)\cdot(1,3)\Rightarrow(1,3)+(x,y)\cdot(3,3)\Rightarrow(x,y)=(1,3)$$

Se consideran las matrices:

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Halle la matriz A que satisface la ecuación $P^{-1}\cdot A\cdot P=J$.
b) Compruebe que $A^3=P\cdot J^3\cdot P^{-1}$
SOCIALES. 2024 RESERVA 1. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a) Despejamos A

$$P^{-1}\cdot A\cdot P=J\Rightarrow P\cdot P^{-1}\cdot A\cdot P\cdot P^{-1}=P\cdot J\cdot P^{-1}\Rightarrow A=P\cdot J\cdot P^{-1}$$

Calculamos la inversa de P

$$P^{-1}=\frac{(P^{adj})^t}{|P|}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{-2}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-2}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz A

$$A=P\cdot J\cdot P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) Comprobamos la igualdad

$$A^3=\left(P\cdot J\cdot P^{-1}\right)\cdot\left(P\cdot J\cdot P^{-1}\right)\cdot\left(P\cdot J\cdot P^{-1}\right)=P\cdot J\cdot P^{-1}\cdot P\cdot J\cdot P^{-1}\cdot P\cdot J\cdot P^{-1}=$$
$$=P\cdot J\cdot I\cdot J\cdot I\cdot J\cdot P^{-1}=P\cdot J\cdot J\cdot J\cdot P^{-1}=P\cdot J^3\cdot P^{-1}$$

Luego, es cierta la igualdad

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **, resuelva la ecuación:** $A^2 \cdot X + A^4 = A$

SOCIALES II. 2024 JULIO. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

Despejamos la matriz X

$$A^2 \cdot X + A^4 = A \Rightarrow A^{-1} \cdot A^2 \cdot X + A^{-1} \cdot A^4 = A^{-1} \cdot A \Rightarrow A \cdot X + A^3 = I \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X + A^{-1} \cdot A^3 = A^{-1} \cdot I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X + A^2 = A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} - A^2$$

Calculamos la inversa

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}^t}{-9} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}}{-9} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Calculamos A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$X = A^{-1} - A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{40}{9} \\ \frac{40}{9} & -\frac{10}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{38}{9} & \frac{40}{9} & -\frac{8}{9} \end{pmatrix}$$