EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: MATRICES

- Junio, Ejercicio A1
- Reserva 1, Ejercicio A1
- Reserva 2, Ejercicio A1
- Reserva 3, Ejercicio A1
- Reserva 4, Ejercicio A1
- Julio, Ejercicio A1

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, **siendo** a **un número real.**

a) Obtenga los valores de a **para los que la matriz** A **tenga inversa.**

b) Para $a=1$**, resuelva la ecuación** $X\cdot A-B=C\cdot A$

c) Determine razonadamente la dimensión de la matriz D que permite realizar la operación $B\cdot A+D\cdot C^t\cdot B$

SOCIALES II. 2024 JUNIO. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix}=-2a+10=0\Rightarrow a=5$$

Tiene inversa para todos los valores de $a\neq 5$

b) Despejamos la matriz X

$$X\cdot A-B=C\cdot A\Rightarrow X\cdot A=C\cdot A+B\Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=C\cdot A\cdot A^{-1}+B\cdot A^{-1}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow X=C+B\cdot A^{-1}$$

Calculamos la inversa para $a=1$

$$A^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^t}{8}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}}{8}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$X=C+B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

c) Calculamos la dimensión de la matriz D

$$B\cdot A+D\cdot C^t\cdot B\Rightarrow (1,3)\cdot(3,3)+(x,y)\cdot(3,1)\cdot(1,3)\Rightarrow(1,3)+(x,y)\cdot(3,3)\Rightarrow(x,y)=(1,3)$$

Se consideran las matrices:

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

a) Halle la matriz A que satisface la ecuación $P^{-1}\cdot A\cdot P=J$.

b) Compruebe que $A^3=P\cdot J^3\cdot P^{-1}$

SOCIALES. 2024 RESERVA 1. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a) Despejamos A

$$P^{-1}\cdot A\cdot P=J\Rightarrow P\cdot P^{-1}\cdot A\cdot P\cdot P^{-1}=P\cdot J\cdot P^{-1}\Rightarrow A=P\cdot J\cdot P^{-1}$$

Calculamos la inversa de P

$$P^{-1}=\frac{(P^{adj})^t}{|P|}=\frac{\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}^t}{-2}=\frac{\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}}{-2}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz A

$$A=P\cdot J\cdot P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -5 & -3\\ 0 & -4 & 0\\ -3 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 2 & 0\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

b) Comprobamos la igualdad

$$A^3=\left(P\cdot J\cdot P^{-1}\right)\cdot\left(P\cdot J\cdot P^{-1}\right)\cdot\left(P\cdot J\cdot P^{-1}\right)=P\cdot J\cdot P^{-1}\cdot P\cdot J\cdot P^{-1}\cdot P\cdot J\cdot P^{-1}=$$
$$=P\cdot J\cdot I\cdot J\cdot I\cdot J\cdot P^{-1}=P\cdot J\cdot J\cdot J\cdot P^{-1}=P\cdot J^3\cdot P^{-1}$$

Luego, es cierta la igualdad

Se consideran las matrices $M=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ $N=\begin{pmatrix}3&2&2\\5&2&1\\7&4&0\end{pmatrix}$ $V=\begin{pmatrix}5-a^2\\a-1\\a^2\end{pmatrix}$**, siendo** a **un número real**

a) Halle el valor de a **para que se verifique que** $M^t\cdot V=\begin{pmatrix}5&1&5\end{pmatrix}^t$**.**

b) Calcule M^{-1} **y resuelva la ecuación matricial** $X\cdot M-I_3=N$ **.**

c) Razone si las operaciones $2\cdot V\cdot N^t$ **y** $(N+M^t)\cdot V$ **se pueden realizar y, en aquellos casos en que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante.**

SOCIALES II. 2024 RESERVA 2. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a)

$$M^t\cdot V=\begin{pmatrix}5&1&5\end{pmatrix}^t\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5-a^2\\a-1\\a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2a+3\\a^2+a-1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a+3=5\Rightarrow a=1\\ a^2+a-1=1\Rightarrow a^2+a-2=0\Rightarrow\begin{cases}a=1\\a=-2\end{cases}\end{cases}$$

Luego, $a=1$

b) Calculamos la inversa

$$M^{-1}=\frac{(M^{adj})^t}{|M|}=\frac{\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&0&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}^t}{2}=\frac{\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&0&1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial

$$X\cdot M-I_3=N\Rightarrow X\cdot M=N+I_3\Rightarrow X\cdot M\cdot M^{-1}=(N+I_3)\cdot M^{-1}\Rightarrow X=(N+I_3)\cdot M^{-1}$$

$$X=\left[\begin{pmatrix}3&2&2\\5&2&1\\7&4&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&0&1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&2\\5&3&1\\7&4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&0&1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&3&1\end{pmatrix}$$

c) $2\cdot V\cdot N^t$ no se puede hacer, ya que, el número de columnas de V no coincide con el número de filas N^t

$(N+M^t)\cdot V$ si se puede hacer, ya que, el número de columnas de $(N+M^t)$ coincide con el número de filas de V y la matriz resultante es de orden $(3,1)$

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Resuelva la siguiente ecuación $A\cdot B\cdot X\cdot C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Halle las dimensiones de las matrices D y E para que tenga sentido la igualdad $A\cdot D=E\cdot B$.
SOCIALES II. 2024. RESERVA 3. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D\cdot X\cdot C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow D^{-1}\cdot D\cdot X\cdot C\cdot C^{-1}=D^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot C^{-1}\Rightarrow X=D^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot C^{-1}$$

Calculamos las inversas

$$D^{-1}=\frac{(D^{adj})^t}{|D|}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^t}{-5}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}{-5}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$C^{-1}=\frac{(C^{adj})^t}{|C|}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X=D^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot C^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -1 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & 1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -1 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & 1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

b) $A_{(2,3)}\cdot D_{(3,x)}=E_{(y,3)}\cdot B_{(3,3)}\Rightarrow(2,x)=(y,3)\Rightarrow\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

Luego, la matriz D es de orden (3,3) y la matriz E es de orden (2,3)

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Determine las matrices X e Y que satisfacen simultáneamente las ecuaciones

$$2\cdot X-Y=4\cdot A \qquad X+Y=B$$

b) Calcule la matriz C^{2024}.

c) Si D es una matriz de dimensión 2 x 3, razone si las siguientes operaciones se pueden realizar y, en aquellos casos en los que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante:

$$A^t\cdot B+D\cdot D^t \qquad D\cdot B^t+A \qquad D^t\cdot A^t+D$$

SOCIALES II. 2024 RESERVA 4. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}2X-Y=4A\\ X+Y=B\end{array}\right\}\Rightarrow sumamos\Rightarrow 3X=4A+B\Rightarrow X=\frac{\begin{pmatrix}0 & 4\\ 4 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}}{3}=\frac{\begin{pmatrix}3 & 6\\ 6 & 0\end{pmatrix}}{3}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$Y=B-X=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

b) Calculamos:

$$C^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$C^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$C^4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

Luego: $C^{2024}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2024 & 1\end{pmatrix}$

c)

Si es posible: $A^t\cdot B+D\cdot D^t\Rightarrow(2,2)\cdot(2,2)+(2,3)\cdot(3,2)=(2,2)+(2,2)=(2,2)$

No es posible: $D\cdot B^t+A\Rightarrow(2,3)\cdot(2,2)+(2,2)$

No es posible: $D^t\cdot A^t+D\Rightarrow(3,2)\cdot(2,2)+(2,3)=(3,2)+(2,3)$

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **, resuelva la ecuación:** $A^2\cdot X+A^4=A$

SOCIALES II. 2024 JULIO. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

Despejamos la matriz X

$$A^2\cdot X+A^4=A \Rightarrow A^{-1}\cdot A^2\cdot X+A^{-1}\cdot A^4=A^{-1}\cdot A \Rightarrow A\cdot X+A^3=I \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X+A^{-1}\cdot A^3=A^{-1}\cdot I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X+A^2=A^{-1} \Rightarrow X=A^{-1}-A^2$$

Calculamos la inversa

$$A^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}^t}{-9}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}}{-9}=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Calculamos A^2

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$X=A^{-1}-A^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{40}{9} \\ \frac{40}{9} & -\frac{10}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{38}{9} & \frac{40}{9} & -\frac{8}{9} \end{pmatrix}$$