PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 6: TEORÍA DE MUESTRAS

- Junio, Ejercicio D7
- Junio, Ejercicio D8
- Reserva 1, Ejercicio D7
- Reserva 1, Ejercicio D8
- Julio, Ejercicio D7
- Julio, Ejercicio D8

a) Se realizan dos muestreos aleatorios estratificados con afijación proporcional para una población dividida en cuatro estratos $E_1, E_2, E_3\ y\ E_4$. En la primera muestra se han seleccionado 25 individuos de E_1 y 30 de E_2. En la segunda muestra se han seleccionado 80 individuos de E_3 y 100 de E_4. Sabiendo que el estrato E_1 tiene 500 individuos y que el estrato E_3 tiene 400, determine el tamaño de cada estrato de la población y el tamaño de las muestras en cada estrato.
b) Dada la población $\{-3,-1,2,5,7\}$, se consideran todas las muestras posibles de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple. Calcule la media y la varianza de la distribución de las medias muestrales.
SOCIALES II. 2024. JUNIO. EJERCICIO D7

R E S O L U C I Ó N

a)

	E_1	E_2	E_3	E_4	Total
Muestra 1	25	30	**20**	**25**	**100**
Muestra 2	**100**	**120**	80	100	**400**
Población	500	**600**	400	**500**	**2000**

Muestra 1: $\frac{25}{500}=\frac{30}{x}\Rightarrow x=600$ $\qquad \frac{25}{500}=\frac{y}{400}\Rightarrow y=20$

Muestra 2: $\frac{80}{400}=\frac{100}{z}\Rightarrow z=500$ $\qquad \frac{80}{400}=\frac{b}{500}\Rightarrow b=100$ $\qquad \frac{80}{400}=\frac{a}{600}\Rightarrow a=120$

Muestra 1: $\frac{25}{500}=\frac{c}{500}\Rightarrow c=25$

b) Todas las muestras de tamaño 2:

$(-3,-3)$	$(-3,-1)$	$(-3,2)$	$(-3,5)$	$(-3,7)$
$(-1,-3)$	$(-1,-1)$	$(-1,2)$	$(-1,5)$	$(-1,7)$
$(2,-3)$	$(2,-1)$	$(2,2)$	$(2,5)$	$(2,7)$
$(5,-3)$	$(5,-1)$	$(5,2)$	$(5,5)$	$(5,7)$
$(7,-3)$	$(7,-1)$	$(7,2)$	$(7,5)$	$(7,7)$

Medias muestrales:

-3	-2	$-0'5$	1	2
-2	-1	$0'5$	2	3
$-0'5$	$0'5$	2	$3'5$	$4'5$
1	2	$3'5$	5	6
2	3	$4'5$	6	7

Construimos la tabla para las medias muestrales:

	f	$x \cdot f$	$x^2 \cdot f$
-3	1	-3	9
-2	2	-4	8
-1	1	-1	1
$-0'5$	2	-1	0’5
$0'5$	2	1	0’5
1	2	2	2
2	5	10	20
3	2	6	18
$3'5$	2	7	24’5
$4'5$	2	9	40’5
5	1	5	25
6	2	12	72
7	1	7	49
	25	50	270

Media = $\mu = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \dfrac{50}{25} = 2$

Varianza $= \sigma^2 = \dfrac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - \overline{x}^2 = \dfrac{270}{25} - 2^2 = 6'8$

También, podríamos calcularlo a partir de los datos de la población

Construimos la tabla para población

x	f	$x \cdot f$	$x^2 \cdot f$
-3	1	-3	9
-1	1	-1	1
2	1	2	4
5	1	5	25
7	1	7	49
	5	10	88

Media = $\mu = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \dfrac{10}{5} = 2$

Varianza $= \sigma^2 = \dfrac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - \overline{x}^2 = \dfrac{88}{5} - 2^2 = 13'6$

La varianza de las medias muestrales sería: $\sigma^2 = \dfrac{13'6}{2} = 6'8$

Se desea conocer la proporción de habitantes de una determinada ciudad que realizan turismo sostenible durante sus vacaciones. Para ello se selecciona al azar una muestra de 2500 habitantes, resultando que 1825 realizan turismo sostenible.
a) Calcule un intervalo, con un nivel de confianza del 95%, para estimar la proporción de habitantes de la ciudad que realizan turismo sostenible.
b) Para un nivel de confianza del 97% y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál sería el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1%?.
c) Razone que efecto producirá sobre la amplitud del intervalo una disminución del tamaño de la muestra.
SOCIALES II. 2024 JUNIO. EJERCICIO D8

R E S O L U C I Ó N

a) El intervalo de confianza para la proporción viene dado por:

$$I.C.\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\,,\, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)$$

Con los datos del problema calculamos:

$$p = \frac{1825}{2500} = 0'73$$

$$\frac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$$

Luego, sustituyendo, tenemos:

$$I.C.\left(0'73 - 1'96\cdot\sqrt{\frac{0'73\cdot 0'27}{2500}}\ ,\ 0'73 + 1'96\cdot\sqrt{\frac{0'73\cdot 0'27}{2500}}\right) = (0'7126\ ;\ 0'7474)$$

b) Calculamos el tamaño mínimo de la muestra

$$\frac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$$

$$E = 0'01 = 2'17\cdot\sqrt{\frac{0'73\cdot 0'27}{n}} \Rightarrow n = 9.281,24 \simeq 9.282 \text{ habitantes}$$

c) Si el tamaño de la muestra disminuye, entonces el error aumenta, con lo cual la amplitud del intervalo aumenta.

Se ha administrado un determinado medicamento a una muestra de 220 enfermos de una población que padece una cierta enfermedad y se ha observado una respuesta positiva en 165 de ellos.
a) Estime, mediante un intervalo de confianza del 97’5%, la proporción de enfermos que responderían positivamente si este medicamento se administrase a la población de la que se ha extraído la muestra. Según el intervalo obtenido, razone si puede admitirse que el porcentaje de enfermos que responderían positivamente al medicamento administrado es del 70%.
b) Con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea menor que el 2’5%?.
SOCIALES II. 2024 RESERVA 1. EJERCICIO D7

R E S O L U C I Ó N

a) El intervalo de confianza para la proporción viene dado por:

$$I.C.\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\, , p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)$$

Con los datos del problema calculamos:

$$p = \frac{165}{220} = 0'75$$

$$\frac{1+0'975}{2} = 0'9875 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'24$$

Luego, sustituyendo, tenemos:

$$I.C.\left(0'75 - 2'24\cdot\sqrt{\frac{0'75\cdot 0'25}{220}}\ ,\ 0'75 + 2'24\cdot\sqrt{\frac{0'75\cdot 0'25}{220}}\right) = (0'6846\ ;\ 0'8154)$$

El intervalo es 68’46% y 81’54%, luego, el 70% está en ese intervalo, por lo tanto se puede admitir que el porcentaje de enfermos que responderían positivamente al medicamento administrado es del 70%

b) Calculamos el tamaño mínimo de la muestra

$$E = 0'025 = 2'24\cdot\sqrt{\frac{0'75\cdot 0'25}{n}} \Rightarrow n = 1505'28 \simeq 1506 \text{ enfermos}$$

Un atleta obtiene los siguientes tiempos, en minutos, de 10 repeticiones cronometradas de una prueba:

2’71 3’84 3’26 2’28 2’86 3’08 3’07 2’46 2’54 2’58

Poe experiencias anteriores se sabe que el tiempo en cada repetición sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0’36 minutos.

a) Calcule un intervalo de confianza para el tiempo medio de estas repeticiones con un 93’5% de confianza.

b) ¿Cuántas repeticiones como mínimo se tendrán que cronometrar si se quiere obtener un error en la estimación del tiempo medio inferior a 0’05 minutos manteniendo el mismo nivel de confianza?.

SOCIALES II. 2024 RESERVA 1. EJERCICIO D8

R E S O L U C I Ó N

a) Como el nivel de confianza es del 97%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'935}{2}=0'9675 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=1'845$$

Calculamos la media que será:

$$\mu=\frac{2'71+3'84+3'26+2'28+2'86+3'08+3'07+2'46+2'54+2'58}{10}=2'868$$

El intervalo de confianza de la media poblacional viene dado por: $I.C.\left(\mu-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\mu+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Luego sustituyendo los datos, tenemos:

$$I.C.\left(\mu-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\mu+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(2'868-1'845\cdot\frac{0'36}{\sqrt{10}},2'868+1'845\cdot\frac{0'36}{\sqrt{10}}\right)=(2'658\ ;\ 3'078)$$

b) Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E=0'05=1'845\cdot\frac{0'36}{\sqrt{n}}\Rightarrow n=176'46\simeq 177 \quad \text{repeticiones}$$

La altura de un cierto tipo de plantas de maíz sigue una distribución Normal de media 145 cm y desviación típica de 22 cm.
a) ¿Qué porcentaje de plantas tiene una altura comprendida entre 135 cm y 155 cm?.
b) ¿Qué altura, como mínimo, debe tener una planta para estar entre el 50% de las más altas?.
c) Se selecciona una muestra aleatoria de 16 plantas. Halle la probabilidad de que la altura media de las plantas de esta muestra esté comprendida entre 140 cm y 151 cm.
SOCIALES II. 2024 JULIO. EJERCICIO D7

R E S O L U C I Ó N

La distribución de las medias muestrales es: $N\left(3'8\ ;\ \frac{1}{\sqrt{16}}\right)=N(3'8\ ;\ 0'25)$

a)

$$p(135<x<155)=p\left(\frac{135-145}{22}<z<\frac{155-145}{22}\right)=p(-0'45<z<0'45)=p(z<0'45)-p(z<-0'45)=$$
$$=2p(z<0'45)-1=2\cdot 0'6736-1=0'3472=34'72\%$$

b) Nos piden el valor de a que cumple $p(x<a)=0'5$. Por la simetría de la distribución normal, vemos que este valor es la media de la distribución. Luego, la altura que debe tener una planta para estar entre el 50% de las más altas es de, al menos, 145 cm.

c) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(145\ ;\ \frac{22}{\sqrt{16}}\right)=N(145\ ;\ 5'5)$

$$p(140<x<151)=p\left(\frac{140-145}{5'5}<z<\frac{151-145}{5'5}\right)=p(-0'91<z<1'09)=p(z<1'09)-p(z<-0'91)=$$
$$=p(z<1'09)-\left[1-p(z<0'91)\right]=0'8621-\left[1-0'8186\right]=0'6807$$

Se desea estimar la proporción de personas que viajan en tren con su mascota. Para ello se selecciona una muestra aleatoria de 300 viajeros, obteniéndose que 12 de ellos viajan con su mascota.
a) Obtenga un intervalo, con un nivel de confianza del 97%, para estimar la proporción de personas que viajan en tren con su mascota.
b) Manteniendo la misma proporción muestral y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuántas personas que viajan en tren deberán seleccionarse aleatoriamente como mínimo para que la proporción muestral difiera de la proporción poblacional a lo sumo en un 2%?.
SOCIALES II. 2024 JULIO. EJERCICIO D8

R E S O L U C I Ó N

a) El intervalo de confianza para la proporción viene dado por:

$$I.C.\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\ ,\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)$$

Con los datos del problema calculamos:

$$p = \frac{12}{300} = 0'04$$

$$\frac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$$

Luego, sustituyendo, tenemos:

$$I.C.\left(0'04 - 2'17\cdot\sqrt{\frac{0'04\cdot 0'96}{300}}\ ,\ 0'04 + 2'17\cdot\sqrt{\frac{0'04\cdot 0'96}{300}}\right) = (0'0155\ ;\ 0'0645)$$

b) Calculamos el tamaño mínimo de la muestra

$$\frac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$$

$$E = 0'02 = 1'96\cdot\sqrt{\frac{0'04\cdot 0'96}{n}} \Rightarrow n = 368'79 \simeq 369 \text{ personas}$$