EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2024

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 5
- Reserva 1, Ejercicio 5
- Reserva 2, Ejercicio 6
- Reserva 3, Ejercicio 5
- Reserva 4, Ejercicio 5
- Julio, Ejercicio 5
- Modelo, Ejercicio 4

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{\frac{1}{8}} & \mathbf{\frac{1}{8}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{2024}

b) Halla la matriz X**, si es posible, que verifica** $A^2 \cdot X \cdot A + I = O$**, donde** I **y** O **son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.**

MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos: $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{8} & \frac{2}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{8} & \frac{4}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{8} & \frac{n}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2024}{8} & \frac{2024}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 253 & 253 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Despejamos la matriz X:

$$A^2 \cdot X \cdot A + I = O \Rightarrow A^2 \cdot X \cdot A = -I \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot A \cdot X \cdot A = -I \cdot A^{-1} \Rightarrow A \cdot X \cdot A = -A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = -A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} \Rightarrow X = -\left(A^{-1}\right)^3 = -A^{-3}$$

Luego, $X = -A^{-3} = -\begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{8} & \frac{-3}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de m **para los que la matriz** A^2 **tiene inversa**

b) Para $m=0$ **calcula, si es posible, la matriz** X **que verifica** $A^2X=\frac{1}{2}(A+B)$

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 1. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz A^2

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2m & 1 & m \\ 3-m & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante:

$$\left|A^2\right|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2m & 1 & m \\ 3-m & -3 & 5 \end{vmatrix}=m^2-2m+1=0\Rightarrow m=1$$

Luego, tiene inversa para $m\neq 1$

b) Calculamos la inversa para $m=0$

$$(A^2)^{-1}=\frac{(A^{2\ adj})^t}{\left|A^2\right|}=\frac{\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^t}{1}=\begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$A^2X=\frac{1}{2}(A+B)\Rightarrow X=\frac{1}{2}(A^2)^{-1}\cdot(A+B)=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 5 & 11 & 22 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -30 & -13 & -77 \\ 0 & 5 & 4 \\ 19 & 13 & 53 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **e** I **la matriz identidad de orden 2.**

a) Sabiendo que A **verifica la identidad** $(A+aI)^2=bI$ **, halla** a **y** b**.**

b) Resuelve la ecuación $MX+M^2=I$ **.**

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 2. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los valores de a y b

$$(A+aI)^2=bI\Rightarrow\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 1+a & 3 \\ -2 & 5+a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1+a & 3 \\ -2 & 5+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1+a^2+2a-6 & 3+3a+15+3a \\ -2-2a-10-2a & -6+25+a^2+10a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a^2+2a-5=b \\ -4a-12=0 \\ 6a+18=0 \\ a^2+10a+19=b \end{cases}\Rightarrow a=-3\ ;\ b=-2$$

b) $MX+M^2=I\Rightarrow MX=I-M^2\Rightarrow M^{-1}\cdot M\cdot X=M^{-1}\cdot(I-M^2)\Rightarrow X=M^{-1}\cdot(I-M^2)$

Calculamos $(I-M^2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculamos: $M^{-1}=\dfrac{(M^{adj})^t}{|M|}=\dfrac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^t}{-1}=\dfrac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Luego, $X=M^{-1}\cdot(I-M^2)=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & y & z \end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Sabiendo que el determinante de A **es 5, calcula** $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, **indicando las propiedades que utilizas.**

b) Calcula los valores (x, y, z) **tales que** $B \cdot A = C$

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 3. EJERCICIO 5.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{(1)} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{(2)} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

Propiedades aplicadas

(1) Si una línea de una determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes. En el primero ponemos el primer sumando y en el segundo el segundo sumando.

(2) Si un determinante tiene dos líneas iguales, el determinante vale 0.

(3) Si a los elementos de una línea se les suman los elementos de otra paralela a ella, multiplicados previamente por un número real, el valor del determinante no varía.

b) Planteamos y resolvemos el sistema

$$B \cdot A = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+3y+z & y+z & z+2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+z=3 \\ y+z=0 \\ 2y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+z=3 \\ y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3+2t \\ y=-t \\ z=t \end{array}\right.$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula los determinantes de las matrices $\left((AB)^5\right)^{-1}$ **y** $27AB^6$**. b) Halla la matriz** X**, si es posible, que verifica que** $A\cdot X\cdot B=9I$ **, donde** I **es la matriz identidad de orden3**
MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 4. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el valor de los determinantes de las matrices A y B.

$$|A|=2+7=9 \qquad |B|=-\frac{1}{9} \qquad |A\cdot B|=|A|\cdot|B|=9\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)=-1$$

Calculamos los determinantes que nos piden

$$\left|\left((AB)^5\right)^{-1}\right|=\frac{1}{|(AB)^5|}=\frac{1}{|AB|\cdot|AB|\cdot|AB|\cdot|AB|\cdot|AB|}=\frac{1}{(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)}=-1$$

$$|27AB^6|=|27A|\cdot|B^6|=27^3\cdot 9\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)^6=\frac{3^{11}}{3^{12}}=\frac{1}{3}$$

b) $A\cdot X\cdot B=9I\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1}=9A^{-1}\cdot I\cdot B^{-1}\Rightarrow X=9A^{-1}\cdot B^{-1}$

Calculamos las matrices inversas

$$A^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}^t}{9}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}{9}=\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{7}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{(B^{adj})^t}{|B|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^t}{-\frac{1}{9}}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & 2 \end{pmatrix}}{-\frac{1}{9}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X: $X=9\cdot A^{-1}\cdot B^{-1}=9\cdot\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{7}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & -63 \\ 9 & 0 & -162 \end{pmatrix}$

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla todas las matrices X **que cumplen:** $X\cdot A=-A\cdot X^{t}$ **y** $X^{2}=I$**, donde** I **es la matriz identidad de orden 2.**

b) Halla todas las matrices Y que cumplen $Y\cdot A=A\cdot Y$**, la suma de los elementos de su diagonal principal es cero y tienen determinante** -1**.**

MATEMÁTICAS II. 2024. JULIO. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Llamamos $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$X\cdot A=-A\cdot X^{t}\Rightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & c \\ -b & -d \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ d=0 \\ b=c \end{cases}$$

$$X^{2}=I\Rightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} b^{2} & 0 \\ 0 & b^{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow b=c=\pm 1$$

Luego: $X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\acute{o}$ $X=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Llamamos $Y=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$Y\cdot A=A\cdot Y\Rightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

$$a+d=0\Rightarrow a=-d$$

$$\begin{vmatrix} -d & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix}=-d^{2}=-1\Rightarrow d=\pm 1\ ;\ a=\mp 1$$

Luego: $Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\acute{o}$ $Y=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & a & -b\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

a) Calcula A^{10}.

b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de $I+A+A^2$, donde I denota la matriz identidad de orden 3.

MATEMÁTICAS II. 2024. MODELO. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & a & -b\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & a & -b\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & ab\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & ab\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & a & -b\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^{10}=A^3\cdot A^3\cdot A^3\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & a & -b\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

b) Calculamos la matriz $B=I+A+A^2$

$$B=I+A+A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a & -b\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & ab\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a & -b+ab\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante

$$|B|=|I+A+A^2|=\begin{vmatrix}1 & a & -b+ab\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

Calculamos la inversa

$$B^{-1}=\frac{(Adj\,B)^t}{|B|}=\frac{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -a & 1 & 0\\ b & -b & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & -a & b\\ 0 & 1 & -b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$