EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2024

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 5
- Reserva 1, Ejercicio 5
- Julio, Ejercicio 5

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{2024}

b) Halla la matriz X **,si es posible, que verifica** $A^2\cdot X\cdot A+I=O$**, donde** I **y** O **son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.**

MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos: $A^2=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{8} & \frac{2}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{8} & \frac{4}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto: $A^n=\begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{8} & \frac{n}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow A^{2024}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{2024}{8} & \frac{2024}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 253 & 253 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Despejamos la matriz X:

$$A^2\cdot X\cdot A+I=O\Rightarrow A^2\cdot X\cdot A=-I\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot A\cdot X\cdot A=-I\cdot A^{-1}\Rightarrow A\cdot X\cdot A=-A^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot A\cdot A^{-1}=-A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A^{-1}\Rightarrow X=-\left(A^{-1}\right)^3=-A^{-3}$$

Luego, $X=-A^{-3}=-\begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{8} & \frac{-3}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de m para los que la matriz A^2 tiene inversa

b) Para $m=0$ calcula, si es posible, la matriz X que verifica $A^2X=\frac{1}{2}(A+B)$

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 1. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz A^2

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2m & 1 & m \\ 3-m & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante:

$$|A^2|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2m & 1 & m \\ 3-m & -3 & 5 \end{vmatrix}=m^2-2m+1=0\Rightarrow m=1$$

Luego, tiene inversa para $m\neq 1$

b) Calculamos la inversa para $m=0$

$$(A^2)^{-1}=\frac{(A^{2\,adj})^t}{|A^2|}=\frac{\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^t}{1}=\begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$A^2X=\frac{1}{2}(A+B)\Rightarrow X=\frac{1}{2}(A^2)^{-1}\cdot(A+B)=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 5 & 11 & 22 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -30 & -13 & -77 \\ 0 & 5 & 4 \\ 19 & 13 & 53 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla todas las matrices X que cumplen: $X \cdot A = -A \cdot X^t$ y $X^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) Halla todas las matrices Y que cumplen $Y \cdot A = A \cdot Y$, la suma de los elementos de su diagonal principal es cero y tienen determinante -1.

MATEMÁTICAS II. 2024. JULIO. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Llamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$X \cdot A = -A \cdot X^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ -b & -d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ d = 0 \\ b = c \end{cases}$$

$$X^2 = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow b = c = \pm 1$$

Luego: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ó $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Llamamos $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$Y \cdot A = A \cdot Y \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$a + d = 0 \Rightarrow a = -d$$

$$\begin{vmatrix} -d & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = -d^2 = -1 \Rightarrow d = \pm 1 \ ; \ a = \mp 1$$

Luego: $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ó $Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$