EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2024

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1
- Junio, Ejercicio 2
- Reserva 1, Ejercicio 1
- Reserva 1, Ejercicio 2
- Reserva 2, Ejercicio 1
- Reserva 2, Ejercicio 2
- Reserva 3, Ejercicio 1
- Reserva 3, Ejercicio 2
- Reserva 4, Ejercicio 1
- Reserva 4, Ejercicio 2
- Julio, Ejercicio 1
- Julio, Ejercicio 2
- Modelo, Ejercicio 1

Sea la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(x)$, donde ln denota el logaritmo neperiano, y los puntos de su gráfica $A(1,0)$ y $B(e,1)$.
a) Determina, si existen, los puntos de la gráfica de *f* en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos *A* y *B*.
b) Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto *A*.
MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la ecuación de la recta que pasa por A y B

$$\frac{x-1}{e-1}=\frac{y-0}{1}\Rightarrow y=\frac{1}{e-1}x-\frac{1}{e-1}$$

La pendiente es: $\frac{1}{e-1}$ y tiene que ser igual a $f'(x)=\frac{1}{x}$.

Luego, $\frac{1}{x}=\frac{1}{e-1}\Rightarrow x=e-1$

Por lo tanto, el punto es $\left(e-1\,,\,\ln(e-1)\right)$

b) La pendiente de la recta tangente en $A(1,0)$ es: $f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{1}=1$. Luego, la pendiente de la recta normal es: -1

La recta normal es: $y-0=-1\cdot(x-1)\Rightarrow y=-x+1$

Considera la función continua *f* definida por: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\cdot\cos(x)-a\cdot sen(x)}{x^3} & si \quad x<0 \\ b\cdot\cos(x)-1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

Calcula *a* y *b*

MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Como la función es continua, estudiamos la continuidad en $x=0$

- $f(0)=b-1$
- $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{x\cdot\cos x-a\cdot sen(x)}{x^3}=\dfrac{0}{0}=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{\cos x-x\cdot sen(x)-a\cdot\cos(x)}{3x^2}=\dfrac{1-a}{0}$

Como el limite debe existir, ya que es continua, el numerador debe valer cero para poder aplicar la regla de L'Hôpital, luego $1-a=0\Rightarrow a=1$.

Aplicamos la regla de L'Hôpital para calcular el valor del límite

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x\cdot\cos x-sen(x)}{x^3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x-x\cdot sen(x)-\cos(x)}{3x^2}=\frac{0}{0}=$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-sen(x)-sen(x)-x\cdot\cos(x)+sen(x)}{6x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-sen(x)-x\cdot\cos(x)}{6x}=\frac{0}{0}=$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\cos(x)-\cos(x)+x\cdot sen(x)}{6}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$$

- $\lim_{x\to 0^+}(b\cdot\cos(x)-1)=b-1$

Como es continua $\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)\Rightarrow -\dfrac{1}{3}=b-1\Rightarrow b=\dfrac{2}{3}$.

Luego, $a=1$; $b=\dfrac{2}{3}$

Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+x-1}{x^2-1}$, para $x\neq \pm 1$. Sabiendo que su gráfica tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(0,1)$ y es paralela a la recta $y=2x$, calcula la asíntota oblicua y los valores de a y b.
MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 1. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

La asíntota oblicua tiene de ecuación $y=mx+n$. Como es paralela a $y=2x$, entonces $m=2$. Como pasa por el punto $(0,1)\Rightarrow 1=0+n\Rightarrow n=1$, luego la asíntota oblicua es: $y=2x+1$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+x-1}{x^3-x}=\frac{a}{1}=2\Rightarrow a=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+bx^2+x-1}{x^2-1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{bx^2+3x-1}{x^2-1}\right)=\frac{b}{1}=1\Rightarrow b=1$$

Luego: $a=2$; $b=1$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=arctg(x+\pi)$, donde *arctg* denota la función arcotangente.
a) Calcula los intervalos de concavidad y de convexidad de *f*. Estudia y halla, si existen, los puntos de inflexión de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).
b) Calcula $\lim_{x\to-\pi}\dfrac{arctg(x+\pi)}{sen(x)}$.
MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 1. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=\frac{1}{1+(x+\pi)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2(x+\pi)}{\left[1+(x+\pi)^2\right]^2}=0\Rightarrow x=-\pi$$

	$(-\infty,-\pi)$	$(-\pi,+\infty)$
Signo f''	+	−
Función	Cx	Cn

La función es cóncava en $(-\pi,+\infty)$ y convexa en $(-\infty,-\pi)$

Puntos de inflexión en $(-\pi,0)$

b) Calculamos el límite

$$\lim_{x\to-\pi}\frac{arctg(x+\pi)}{sen(x)}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{L'HOPITAL}=\lim_{x\to-\pi}\frac{\dfrac{1}{1+(x+\pi)^2}}{\cos(x)}=\frac{1}{-1}=-1$$

Sea la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.
a) Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
b) Estudia y halla los extremos relativos y absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).
MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 2. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a y b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=\frac{\dfrac{2x^2-(x^2+1)}{x^2}}{\dfrac{x^2+1}{x}}=\frac{x^2-1}{x^3+x}=0\Rightarrow x=1\ ;\ x=-1$$

	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$
Función	D	C

La función es decreciente en $(0,1)$ y creciente en $(1,+\infty)$

b) Tiene un mínimo relativo en $(1,\ln 2)$ que además es mínimo absoluto. No tiene máximo absoluto.

Calcula *a* y *b* sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{a\left(\ln(1+x)-x\right)+b\left(e^{x}-1\right)+1-\cos(x)}{sen^{2}(x)}=5$

Donde ln denota la función logaritmo neperiano
MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 2. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\left(\ln(1+x)-x\right)+b\left(e^{x}-1\right)+1-\cos(x)}{sen^{2}(x)}=\frac{0}{0} \text{ Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\left(\ln(1+x)-x\right)+b\left(e^{x}-1\right)+1-\cos(x)}{sen^{2}(x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{a\left(\frac{1}{1+x}-1\right)+b\cdot e^{x}+sen(x)}{2sen(x)\cos(x)}=\frac{b}{0}$$

Como el límite es finito, entonces, $b=0$ y podemos seguir aplicando la regla de L'Hopital.

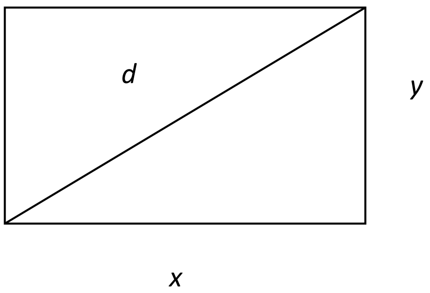
$$\lim_{x\to 0}\frac{a\left(\frac{1}{1+x}-1\right)+sen(x)}{2sen(x)\cos(x)}=\frac{0}{0} \text{ Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\left(\frac{1}{1+x}-1\right)+sen(x)}{2sen(x)\cos(x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{a\left(\frac{-1}{(1+x)^{2}}\right)+\cos(x)}{2\cos^{2}(x)-2\,sen^{2}(x)}=\frac{-a+1}{2}=5\Rightarrow a=-9$$

Luego, los valores son: $a=-9$; $b=0$

De entre todos los rectángulos de área $25\ cm^2$, determina las dimensiones de aquel en el que el producto de las longitudes de sus dos diagonales sea el menor posible.
MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 3. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínimo: $d^2{}_{\min} = \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2} = x^2+y^2$

b) Relación entre las variables: $x \cdot y = 25 \Rightarrow y = \dfrac{25}{x}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$d^2{}_{\min} = x^2 + \frac{625}{x^2} = \frac{x^4+625}{x^2}$$

d) Derivamos e igualamos a cero:

$$d^2{}'_{\min} = \frac{4x^3\cdot x^2 - 2x(x^4+625)}{x^4} = \frac{2x^4-1250}{x^3} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[4]{625} = 5$$

e) Comprobamos que es un mínimo

$$d^2{}''_{\min} = \frac{8x^3\cdot x^3 - 3x^2(2x^4-1250)}{x^6} = \frac{2x^4+3750}{x^4} \Rightarrow d^2{}''(x=5) = \frac{1250+3750}{625} = 8 > 0 \Rightarrow \text{ Mínimo}$$

Luego, es un cuadrado de lado $x = 5\,cm$; $y = 5\,cm$

Considera la función definida por $f(x)=\dfrac{ax^3+x-1}{x^2+bx-3}$, para $x^2+bx-3\neq 0$.
a) Calcula *a* y *b* para que $y=x-2$ sea una asíntota oblicua de la gráfica de *f*.
b) Estudia y halla las asíntotas verticales de la gráfica de *f* cuando $a=0$ y $b=2$
MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 3. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) La asíntota oblicua tiene de ecuación $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+x-1}{x^3+bx^2-3x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{3ax^2+1}{3x^2+2bx-3}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{6ax}{6x+2b}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{6a}{6}=1\Rightarrow a=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^3+x-1}{x^2+bx-3}-x\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^3+x-1-x^3-bx^2+3x}{x^2+bx-3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-bx^2+4x-1}{x^2+bx-3}\right)=\frac{\infty}{\infty}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2bx+4}{2x+b}\right)=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2b}{2}\right)=-2\Rightarrow b=2$$

b) Calculamos las asíntotas verticales de $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$

Igualamos el denominador a 0.

$$x^2+2x-3=0\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases}x_1=\dfrac{2}{2}=1\\[2mm] x_2=\dfrac{-6}{2}=-3\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x^2+2x-3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{2x+2}=\frac{1}{4}\quad ;\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x^2+2x-3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{2x+2}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{x-1}{x^2+2x-3}=\frac{-4}{0^+}=-\infty\quad ;\quad \lim_{x\to -3^+}\frac{x-1}{x^2+2x-3}=\frac{-4}{0^-}=+\infty$$

Luego, $x=-3$ es una asíntota vertical

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x^2+1)e^x$.
a) Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
b) Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de *f* y los puntos de inflexión de su gráfica (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).
MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 4. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=2x\cdot e^x+e^x(x^2+1)=e^x\left(x^2+2x+1\right)=0\Rightarrow\ x=-1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	+
Función	C	C

Luego, la función es creciente en todo su dominio $\mathbb{R}$

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$y''=e^x(x^2+2x+1)+(2x+2)\cdot e^x=e^x\left(x^2+4x+3\right)=0\Rightarrow x=-1\ ;\ x=-3$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,\infty)$
Signo $f''(x)$	+	—	+
Función	Cx	Cn	Cx

Luego, la función es convexa en $(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$ y cóncava en $(-3,-1)$
Puntos de inflexión en $\left(-3,10e^{-3}\right)$ y $\left(-1,2e^{-1}\right)$.

Sea la función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} a e^{-x}+b\ln(1-x) & si \quad x<0 \\ x+\ln(1+x) & si \quad x\geq 0 \end{cases}$ donde ln denota la función logaritmo neperiano
a) Determina a y b.
b) Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.
MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 4. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) La función es derivable, luego, tiene que ser continua.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} a e^{-x}+b\ln(1-x)=a \\ \lim_{x\to 0^+} x+\ln(1+x)=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow a=0$$

Calculamos $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-b}{1-x} & si \quad x<0 \\ 1+\dfrac{1}{1+x} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

Como es derivable se cumple que: $f'(0^-)=f'(0^+)\Rightarrow -b=2\Rightarrow b=-2$

Luego, $a=0$; $b=-2$

b) La ecuación de la recta tangente en $x=0$ es $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$f(0)=0$

$f'(0)=1+\dfrac{1}{1+0}=2$

Luego la recta tangente en $x=0$ es $y-0=2\cdot(x-0)\Rightarrow y=2x$

La ecuación de la recta normal en $x=0$ es:

$$y-f(0)=-\frac{1}{f'(0)}\cdot(x-0)\Rightarrow y-0=-\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=a+b\cos(x)+c\,sen(x)$

Halla *a*, *b* y *c* sabiendo que su gráfica tiene en el punto de abscisa $x=\frac{\pi}{2}$ a la recta $y=1$ como recta tangente, y que la recta $y=x-1$ corta a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$

MATEMATCAS II. 2024. JULIO. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

Calculamos $f'(x)\Rightarrow f'(x)=-b\,sen(x)+c\cos(x)$

A continuación, aplicamos las condiciones del problema.

$$\text{Tangente en } x=\frac{\pi}{2} \text{ es } y=1\Rightarrow\begin{cases} f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow -b\,sen\dfrac{\pi}{2}+c\cos\dfrac{\pi}{2}=0\Rightarrow b=0 \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1\Rightarrow a+b\cos\dfrac{\pi}{2}+c\,sen\dfrac{\pi}{2}=1\Rightarrow a+c=1 \end{cases}$$

Pasa por $(0,-1)\Rightarrow f(0)=-1\Rightarrow a+b\cos 0+c\,sen\,0=-1\Rightarrow a+b=-1$

Resolviendo las tres ecuaciones, tenemos que: $a=-1$; $b=0$; $c=2$

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-x^2}$

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
b) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
MATEMÁTICAS II. 2024. JULIO. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=e^{-x^2}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2}=e^{-x^2}(-2x^2+x+1)=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\ ;\ x=1$$

	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},1\right)$	$(1,\infty)$
Signo y'	$-$	$+$	$-$
Función	D	C	D

Decreciente $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$. Creciente $\left(-\frac{1}{2},1\right)$

b) Vamos a ver si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{e^{-x^2}}=\frac{\infty}{0}=0\Rightarrow y=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{e^{-x^2}}=\frac{-\infty}{0}=0\Rightarrow y=0$$

Por lo tanto, la asíntota horizontal es $y=0$.

Luego, el mínimo absoluto coincide con el mínimo relativo y el máximo absoluto coincide con el máximo relativo

mínimo relativo = mínimo absoluto = $\left(-\frac{1}{2},-e^{-\frac{1}{4}}\right)$

máximo relativo = máximo absoluto = $\left(1,\frac{1}{2e}\right)$

Halla dos números mayores o iguales que 0, cuya suma sea 1, y el producto de uno de ellos por la raíz cuadrada del otro sea máximo.
MATEMÁTICAS II. 2024. MODELO. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

Los números son x e y.

a) Función que queremos que sea máximo: $P_{max} = y \cdot \sqrt{x}$

b) Relación entre las variables: $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

c) Sustituimos en la función: $P_{max} = (1-x) \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x} - \sqrt{x^3}$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$P' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3x^2}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{1-3x}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 1 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

e) Comprobamos el valor que corresponde a un máximo.

$$P'' = \frac{-3 \cdot 2\sqrt{x} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1-3x)}{4x} = \frac{-6\sqrt{x} - \frac{1-3x}{\sqrt{x}}}{4x}$$

$$P''\left(x = \frac{1}{3}\right) = \frac{-6\sqrt{\frac{1}{3}} - 0}{4 \cdot \frac{1}{3}} < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

Luego, los números son: $x = \frac{1}{3}$; $y = 1 - x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$