EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

**PROBLEMAS RESUELTOS**
**SELECTIVIDAD ANDALUCÍA**
**2024**

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 3
- Junio, Ejercicio 4
- Reserva 1, Ejercicio 3
  Reserva 1, Ejercicio 4
- Reserva 2, Ejercicio 3
  Reserva 2, Ejercicio 4
- Reserva 3, Ejercicio 3
  Reserva 3, Ejercicio 4
- Reserva 4, Ejercicio 3
  Reserva 4, Ejercicio 4
- Julio, Ejercicio 3
  Julio, Ejercicio 4
- Modelo, Ejercicio 6

**Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2-1}$, para $x\neq -1, x\neq 1$. Calcula una primitiva de *f* cuya gráfica pase por el punto (0,1).**
**MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 3**

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios

$$\begin{array}{r|l} x^3+2 & x^2-1 \\ \hline -x^3+x & x \\ \hline x+2 & \end{array}$$

Con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{x^3+2}{x^2-1}\,dx=\int x\,dx+\int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx=\frac{x^2}{2}+\int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-1=0\Rightarrow x=1\,;\; x=-1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular $A$ y $B$ sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1\Rightarrow 3=2A\Rightarrow A=\frac{3}{2}$$

$$x=1\Rightarrow 1=-2B\Rightarrow B=-\frac{1}{2}$$

Con lo cual: $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^2-1}\,dx=\frac{x^2}{2}+\int \frac{\frac{3}{2}}{x-1}\,dx+\int \frac{-\frac{1}{2}}{x+1}\,dx=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$

Calculamos la primitiva que pasa por $(0,1)$

$$F(0)=1\Rightarrow \frac{0^2}{2}+\frac{3}{2}\ln|0-1|-\frac{1}{2}\ln|0+1|+C=1\Rightarrow C=1$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3}{2}\ln|x-1|-\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+1$

**Halla la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=x\cos(x)$ y cuya gráfica pasa por los puntos $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi,2\pi)$.**

**MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 4**

R E S O L U C I Ó N

Calculamos $f'(x)=\int x\cos x\,dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ du=dx \\ dv=\cos x\,dx;\ v=sen\,x \end{array}}$$

$$f'(x)=\int x\cos x\,dx=x\cdot sen\,x-\int sen\,x\,dx=x\cdot sen\,x+\cos x+C$$

Calculamos

$$f(x)=\int x\cdot sen\,x+\cos x+C\,dx=\int x\cdot sen\,x\,dx+\int\cos x\,dx+\int C\,dx=\int x\cdot sen\,x\,dx+sen\,x+Cx+D$$

Calculamos por partes $\int x\cdot senx\,dx$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ du=dx \\ dv=sen\,x\,dx;\ v=-\cos x \end{array}}$$

$$\int x\cdot senx\,dx=-x\cdot\cos x+\int\cos x\ dx=-x\cdot\cos x+sen\,x$$

Luego: $f(x)=-x\cdot\cos x+sen\,x+sen\,x+Cx+D=-x\cdot\cos x+2sen\,x+Cx+D$

Como nos piden una primitiva que pase por $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $y$ $(\pi,2\pi)$, sustituyendo podemos calcular el valor de $C$ y $D$

$$f(0)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow -0\cdot\cos 0+2sen\,0+C\cdot 0+D=\frac{\pi}{2}\Rightarrow D=\frac{\pi}{2}$$

$$f(\pi)=2\pi\Rightarrow -\pi\cdot\cos\pi+2sen\,\pi+C\cdot\pi+\frac{\pi}{2}=2\pi\Rightarrow\pi+C\cdot\pi+\frac{\pi}{2}=2\pi\Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la función primitiva que nos piden es: $f(x)=-x\cdot\cos x+2sen\,x+\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}$

**Halla la función $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$ que pasa por el punto $(3,-4\ln 5)$ y verifica $f'(x)=\dfrac{3x^2+4x+12}{x^2-4}$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.**
**MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 1. EJERCICIO 3**

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{3x^2+4x+12}{x^2-4}\,dx=\int 3\,dx+\int \frac{4x+24}{x^2-4}\,dx=3x+\int \frac{4x+24}{x^2-4}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-4=0\Rightarrow x=2\ ;\ x=-2$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{4x+24}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular $A$ y $B$ sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=2\Rightarrow 32=4A\Rightarrow A=8$$
$$x=-2\Rightarrow 16=-4B\Rightarrow B=-4$$

Con lo cual:

$$f(x)=\int \frac{3x^2+4x+12}{x^2-4}\,dx=3x+\int \frac{4x+24}{x^2-4}\,dx=3x+\int \frac{8}{x-2}\,dx-\int \frac{4}{x+2}\,dx=$$
$$=3x+8\ln|x-2|-4\ln|x+2|+C$$

Calculamos la función que pasa por el punto $(3,-4\ln 5)$

$$f(x)=3x+8\ln|x-2|-4\ln|x+2|+C\Rightarrow -4\ln 5=9+8\ln|3-2|-4\ln|3+2|+C\Rightarrow C=-9$$

Luego, la función que nos piden es: $f(x)=3x+8\ln|x-2|-4\ln|x+2|-9$

**Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(x^2-3x+5)\cdot e^x$. Halla una primitiva de $f$ cuya gráfica pase por el punto $(0,5)$.**
**MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 1. EJERCICIO 4**

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x^2-3x+5;\ du=(2x-3)\ dx \\ dv=e^x\,dx;\ v=e^x \end{array}}$$

$$\int(x^2-3x+5)\cdot e^x\,dx=(x^2-3x+5)\cdot e^x-\int(2x-3)\cdot e^x\,dx$$

La volvemos a hacer por partes

$$\boxed{\begin{array}{l} u=2x-3;\ du=2\ dx \\ dv=e^x\,dx;\ v=e^x \end{array}}$$

$$\int(x^2-3x+5)\cdot e^x\,dx=(x^2-3x+5)\cdot e^x-\int(2x-3)\cdot e^x\,dx=(x^2-3x+5)\cdot e^x-(2x-3)\cdot e^x+2e^x+C=$$
$$=(x^2-5x+10)\cdot e^x+C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $(0,5)$.

$$F(x)=(x^2-5x+10)\cdot e^x+C\Rightarrow F(0)=5\Rightarrow 10+C=5\Rightarrow C=-5$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=(x^2-5x+10)\cdot e^x-5$

**Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\int_0^x \cos(t)\cdot sen^2(t)\,dt$.**

**Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x=\frac{\pi}{4}$.**

**MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 2. EJERCICIO 3**

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $f(x)=\int_0^x \cos(t)\cdot sen^2(t)\,dt=\left[\frac{sen^3(t)}{3}\right]_0^x=\frac{sen^3(x)}{3}$

Calculamos la derivada: $f'(x)=\cos(x)\cdot sen^2(x)$

La ecuación de la recta tangente es: $y-f\left(\frac{\pi}{4}\right)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Calculamos:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{sen^3\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3}=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot sen^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Luego, sustituyendo, tenemos que: $y-\frac{\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

La ecuación de la normal es:

$$y-f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow y-\frac{\sqrt{2}}{12}=-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow y-\frac{\sqrt{2}}{12}=-2\sqrt{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

**Calcula $\int \frac{dx}{\sqrt{4+4e^x}}$ (Sugerencia efectúa el cambio de variable $t=\sqrt{1+e^x}$ )**

**MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 2. EJERCICIO 4**

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $t=\sqrt{1+e^x}$ , vamos a calcular cuánto vale *dx*:

$$dt=\frac{e^x}{2\cdot\sqrt{1+e^x}}dx \Rightarrow dx=\frac{2\cdot\sqrt{1+e^x}}{e^x}dt=\frac{2\cdot t}{t^2-1}dt$$

Sustituimos en la integral el cambio de variable

$$\int \frac{\frac{2t\,dt}{t^2-1}}{2\sqrt{1+e^x}}=\int \frac{\frac{2t\,dt}{t^2-1}}{2t}=\int \frac{dt}{t^2-1}$$

Es una integral racional con raíces reales simples. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2-1}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}=\frac{A(t-1)+B(t+1)}{t^2-1}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A*, y *B* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$t=1\Rightarrow 1=2B\Rightarrow B=\frac{1}{2}$$

$$t=-1\Rightarrow 1=-2A\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{dt}{(t^2-1)}=\int \frac{Adt}{t+1}+\int \frac{Bdt}{t-1}=-\frac{1}{2}\ln|t+1|+\frac{1}{2}\ln|t-1|+C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$\int \frac{dt}{(t^2-1)}=-\frac{1}{2}\ln|t+1|+\frac{1}{2}\ln|t-1|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+e^x}+1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+e^x}-1\right|+C$$

**Considera la función** $f(x)=\begin{cases} 1-e^{x} & si \quad x\le 0 \\ x\cos(x) & si \quad x>0 \end{cases}$. **Calcula** $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

**MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 3. EJERCICIO 3**

R E S O L U C I Ó N

Calculamos primero la integral por partes

$$\int x\cdot\cos x\,dx = x\cdot sen\,x-\int sen\,x\,dx = x\cdot sen\,x+\cos x$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ \ du=dx \\ dv=\cos x\,dx;\ v=sen\,x \end{array}}$$

Ahora, calculamos la integral que nos piden:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{0}(1-e^{x})\,dx+\int_{0}^{\pi}x\cos(x)\,dx=\left[x-e^{x}\right]_{-\pi}^{0}+\left[x\cdot sen\,x+\cos x\right]_{0}^{\pi}=$$
$$=\left(0-e^{0}\right)-\left(-\pi-e^{-\pi}\right)+\left(\pi\cdot sen\,\pi+\cos\pi\right)-\left(0\cdot sen\,0+\cos 0\right)=-1+\pi+e^{-\pi}-1-1=-3+\pi+e^{-\pi}$$

**Calcula una primitiva de la función $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=(x-1)^2\ln\frac{\sqrt{x-1}}{2}$ cuya gráfica pase por el punto $\left(5,-\frac{7}{2}\right)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.**
**(Sugerencia: efectúa el cambio de variable $x-1=t^2$)**
**MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 3. EJERCICIO 4**

R E S O L U C I Ó N

$x-1=t^2 \Rightarrow dx=2t\,dt$

$$\int (x-1)^2\ln\frac{\sqrt{x-1}}{2}\,dx=\int t^4\ln\frac{t}{2}\,2t\,dt=2\int t^5\ln\frac{t}{2}\,dt=2\int t^5(\ln t-\ln 2)\,dt=2\int t^5\ln t\,dt-2\int t^5\ln 2\,dt$$

Hacemos por parte la primera integral

$$\int t^5\cdot\ln t\,dt=\frac{t^6\cdot\ln t}{6}-\frac{1}{6}\int t^5\,dt=\frac{t^6\cdot\ln t}{6}-\frac{1}{6}\frac{t^6}{6}=\frac{t^6\cdot\ln t}{6}-\frac{t^6}{36}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln t;\ du=\frac{1}{t}\,dt \\ dv=t^5dt;\ v=\frac{t^6}{6}\end{array}}$$

$$\int (x-1)^2\ln\frac{\sqrt{x-1}}{2}\,dx=2\int t^5\ln t\,dt-2\int t^5\ln 2\,dt=2\left(\frac{t^6\ln t}{6}-\frac{t^6}{36}\right)-2\ln 2\frac{t^6}{6}=\frac{t^6\ln t}{3}-\frac{t^6}{18}-\ln 2\frac{t^6}{3}=$$
$$=\frac{(x-1)^3\ln\sqrt{x-1}}{3}-\frac{(x-1)^3}{18}-\ln 2\frac{(x-1)^3}{3}+C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $\left(5,-\frac{7}{2}\right)$.

$$-\frac{7}{2}=\frac{(5-1)^3\ln\sqrt{5-1}}{3}-\frac{(5-1)^3}{18}-\ln 2\frac{(5-1)^3}{3}+C\Rightarrow-\frac{7}{2}=\frac{64\ln 2}{3}-\frac{64}{18}-\ln 2\frac{64}{3}+C\Rightarrow$$
$$\Rightarrow C=-\frac{7}{2}-\frac{64\ln 2}{3}+\frac{64}{18}+\ln 2\frac{64}{3}\Rightarrow C=-\frac{7}{2}+\frac{64}{18}=\frac{1}{18}$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=\frac{(x-1)^3\ln\sqrt{x-1}}{3}-\frac{(x-1)^3}{18}-\ln 2\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{1}{18}$

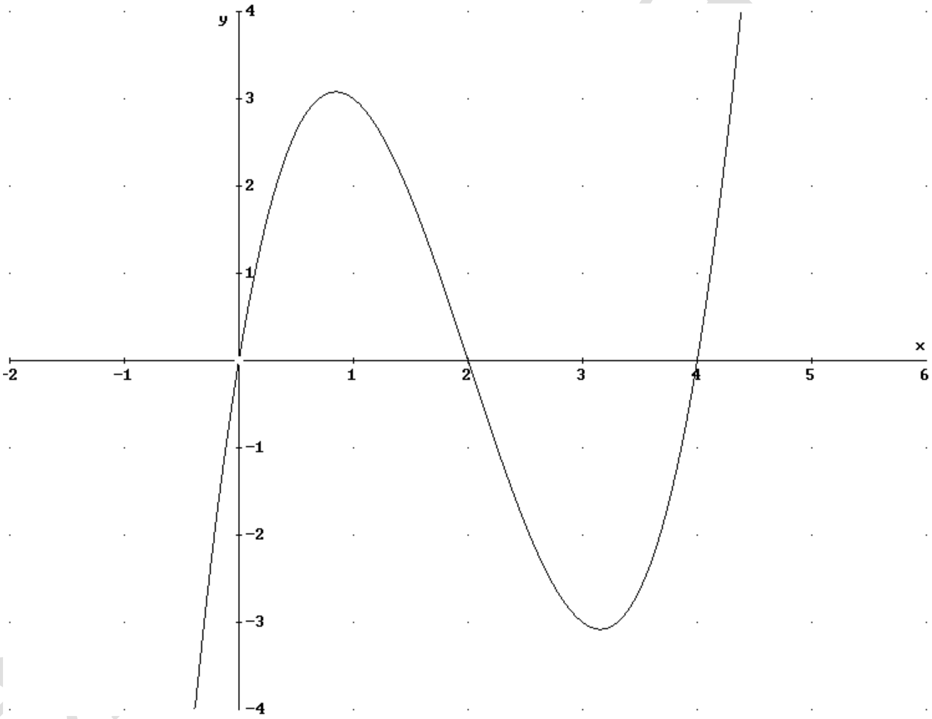
**Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3-6x^2+8x$.**
**a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de $f$ con los ejes de coordenadas y esboza dicha gráfica.**
**b) Calcula la suma de las áreas de los recintos acotados y limitados por la gráfica de $f$ y el eje de abscisas**
**MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 4. EJERCICIO 3**

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos lo punto de corte con los ejes

Corte con el eje X
$\Rightarrow y=0\Rightarrow x^3-6x^2+8x=0\Rightarrow x(x^2-6x+8)=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=4\ ;\ x=2\Rightarrow (0,0)\ ;\ (4,0)\ y\ (2,0)$

Corte con el eje Y $\Rightarrow x=0\Rightarrow y=0\Rightarrow (0,0)$




El área de la región pedida es:

$$A=\int_0^2 (x^3-6x^2+8x)\,dx+\int_2^4 -(x^3-6x^2+8x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}\right]_0^2+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{6x^3}{3}-\frac{8x^2}{2}\right]_2^4=$$

$$=\left(\frac{2^4}{4}-\frac{6\cdot 2^3}{3}+\frac{8\cdot 2^2}{2}\right)-(0)+\left(-\frac{4^4}{4}+\frac{6\cdot 4^3}{3}-\frac{8\cdot 4^2}{2}\right)-\left(-\frac{2^4}{4}+\frac{6\cdot 2^3}{3}-\frac{8\cdot 2^2}{2}\right)=4+0+0-(-4)=8\ u^2$$

**Calcula $\int \frac{e^{3x}-1}{e^{x}-3}\,dx$ . (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t=e^{x}$)**
**MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 4. EJERCICIO 4**

R E S O L U C I Ó N

$e^{x}=t \Rightarrow e^{x}dx=dt$

$$\int \frac{e^{3x}-1}{e^{x}-3}\,dx=\int \frac{t^{3}-1}{(t-3)}\cdot \frac{dt}{t}=\int \frac{t^{3}-1}{t^{2}-3t}\,dt$$

Dividimos los dos polinomios

$$\begin{array}{r|l} t^{3}-1 & t^{2}-3t \\ \cline{2-2} -t^{3}+3t^{2} & t+3 \\ \hline 3t^{2}-1 & \\ -3t^{2}+9t & \\ \hline 9t-1 & \end{array}$$

Con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{t^{3}-1}{t^{2}-3t}\,dt=\int (t+3)\,dt+\int \frac{9t-1}{t^{2}-3t}\,dt=\frac{t^{2}}{2}+3t+\int \frac{9t-1}{t^{2}-3t}\,dt$$

Calculamos las raíces del denominador: $t^{2}-3t=0 \Rightarrow t=0$ ; $t=3$

Descomponemos en fracciones simples: $\frac{9t-1}{t^{2}-3t}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-3}=\frac{A(t-3)+B\cdot t}{t\cdot (t-3)}$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A*, *B y C* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$t=0 \Rightarrow -1=-3A \Rightarrow A=\frac{1}{3}$$
$$t=3 \Rightarrow 26=3B \Rightarrow B=\frac{26}{3}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{t^{3}-1}{t^{2}-3t}\,dt=\frac{t^{2}}{2}+3t+\int \frac{9t-1}{t^{2}-3t}\,dt=\frac{t^{2}}{2}+3t+\int \frac{\frac{1}{3}}{t}\,dt+\int \frac{\frac{26}{3}}{t-3}\,dt=\frac{t^{2}}{2}+3t+\frac{1}{3}\ln|t|+\frac{26}{3}\ln|t-3|=$$
$$=\frac{e^{2x}}{2}+3e^{x}+\frac{1}{3}\ln|e^{x}|+\frac{26}{3}\ln|e^{x}-3|+C$$

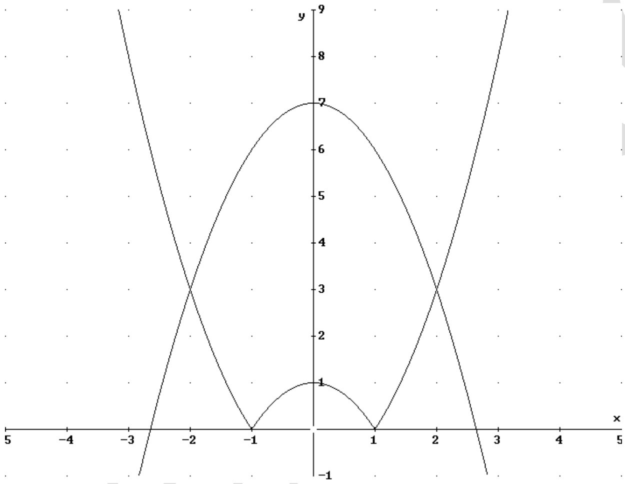
**Sean $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -x^2 + 7$ y $g(x) = |x^2 - 1|$.**

**a) Halla los puntos de intersección de *f* y *g*. Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.**
**b) Calcula el área de dicho recinto.**
**MATEMÁTICAS II. 2024. JULIO. EJERCICIO 3**

R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos la función $f(x) = -x^2 + 7$ que es una parábola, haciendo una tabla de valores.

Abrimos la función $g(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x \le -1 \\ -x^2 + 1 & si \quad -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$ y hacemos el dibujo.




Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = x^2 - 1 \\ f(x) = -x^2 + 7 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Luego, los puntos de corte son el $(-2,3)$ y $(2,3)$

b) Calculamos el área que nos piden

$$A = 2\int_0^1 \left[(-x^2 + 7) - (-x^2 + 1)\right] dx + 2\int_1^2 \left[(-x^2 + 7) - (x^2 - 1)\right] dx =$$

$$= 2\int_0^1 6\, dx + 2\int_1^2 \left(-2x^2 + 8\right) dx = 2\left[6x\right]_0^1 + 2\left[-\frac{2x^3}{3} + 8x\right]_1^2 = 2\left(6 - 0\right) + 2\left(-\frac{16}{3} + 16 + \frac{2}{3} - 8\right) =$$

$$= 12 + \frac{20}{3} = \frac{56}{3} \ u^2$$

**Halla** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos(x)\, dx$

**MATEMÁTICAS II. 2024. JULIO. EJERCICIO 4**

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral de $\displaystyle\int e^x \cdot \cos(x)\, dx$, que es una integral por partes cíclica

$$\int e^x \cdot \cos x\, dx = e^x sen\, x - \int e^x \cdot senx\, dx =$$
$$= e^x sen\, x - \left[ -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \right] = e^x sen\, x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

$$2\int e^x \cdot \cos x\, dx = e^x sen\, x + e^x \cos x \Rightarrow \int e^x \cdot \cos x\, dx = \frac{e^x sen\, x + e^x \cos x}{2} + C$$

| | |
|---|---|
| $u = e^x;\ du = e^x\ dx$<br>$dv = \cos x\, dx;\ v = senx$ | $u = e^x;\ du = e^x\ dx$<br>$dv = sen\, x\, dx;\ v = -\cos x$ |

Calculamos la integral que nos piden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos(x)\, dx = \left[ \frac{e^x sen\, x + e^x \cos x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left( \frac{e^{\frac{\pi}{2}} sen \frac{\pi}{2} + e^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2}}{2} \right) - \left( \frac{e^0 sen\, 0 + e^0 \cos 0}{2} \right) =$$

$$= \left( \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} \right) - \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$$

**Sabiendo que $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = e^{x^2}$ es una primitiva de *f***
**a) Comprueba que *f* es creciente.**
**b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función *f*, el eje de abscisas y la recta $x = 1$.**
**MATEMÁTICAS II. 2024. MODELO. EJERCICIO 6**

R E S O L U C I Ó N

a) Como $F(x)$ es una primitiva de *f*, entonces $f(x) = F'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$

Calculamos la derivada y la igualamos a cero

$$f'(x) = 2 \cdot e^{x^2} + 2x \cdot 2x \cdot e^{x^2} = (2+4x^2) \cdot e^{x^2} = 0 \Rightarrow 2+4x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

Luego, la función será siempre creciente o decreciente. Sustituimos un valor en la derivada para saber si es creciente o decreciente

$$f'(0) = (2+4 \cdot 0^2) \cdot e^{0^2} = 2 > 0 \Rightarrow \text{Creciente}$$

b) Calculamos los puntos de corte con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = 2x \cdot e^{x^2} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x \cdot e^{x^2} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Calculamos el área

$$A = \int_0^1 2x \cdot e^{x^2} \, dx = \left[ e^{x^2} \right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1 \; u^2$$