EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2024

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 3
- Junio, Ejercicio 4
- Reserva 1, Ejercicio 3
  Reserva 1, Ejercicio 4
- Julio, Ejercicio 3
  Julio, Ejercicio 4

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2-1}$, para $x\neq -1, x\neq 1$. Calcula una primitiva de *f* cuya gráfica pase por el punto (0,1).
MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios

$$\begin{array}{r|l} x^3+2 & x^2-1 \\ \hline -x^3+x & x \\ \hline x+2 & \end{array}$$

Con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{x^3+2}{x^2-1}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-1=0 \Rightarrow x=1\,;\;\; x=-1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1 \Rightarrow 3=2A \Rightarrow A=\frac{3}{2}$$

$$x=1 \Rightarrow 1=-2B \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$$

Con lo cual: $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{\frac{3}{2}}{x-1}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{x+1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$

Calculamos la primitiva que pasa por $(0,1)$

$$F(0)=1 \Rightarrow \frac{0^2}{2} + \frac{3}{2}\ln|0-1| - \frac{1}{2}\ln|0+1| + C = 1 \Rightarrow C=1$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}\ln|x-1| - \dfrac{1}{2}\ln|x+1| + 1$

Halla la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=x\cos(x)$ y cuya gráfica pasa por los puntos $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi,2\pi)$.

MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Calculamos $f'(x)=\int x\cos x\,dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ du=dx \\ dv=\cos x\,dx;\ v=sen\,x \end{array}}$$

$$f'(x)=\int x\cos x\,dx=x\cdot sen\,x-\int sen\,x\,dx=x\cdot sen\,x+\cos x+C$$

Calculamos

$$f(x)=\int x\cdot sen\,x+\cos x+C\,dx=\int x\cdot sen\,x\,dx+\int\cos x\,dx+\int C\,dx=\int x\cdot sen\,x\,dx+sen\,x+Cx+D$$

Calculamos por partes $\int x\cdot senx\,dx$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ du=dx \\ dv=sen\,x\,dx;\ v=-\cos x \end{array}}$$

$$\int x\cdot senx\,dx=-x\cdot\cos x+\int\cos x\ dx=-x\cdot\cos x+sen\,x$$

Luego: $f(x)=-x\cdot\cos x+sen\,x+sen\,x+Cx+D=-x\cdot\cos x+2sen\,x+Cx+D$

Como nos piden una primitiva que pase por $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi,2\pi)$, sustituyendo podemos calcular el valor de C y D

$$f(0)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow -0\cdot\cos 0+2sen\,0+C\cdot 0+D=\frac{\pi}{2}\Rightarrow D=\frac{\pi}{2}$$

$$f(\pi)=2\pi\Rightarrow -\pi\cdot\cos\pi+2sen\,\pi+C\cdot\pi+\frac{\pi}{2}=2\pi\Rightarrow\pi+C\cdot\pi+\frac{\pi}{2}=2\pi\Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la función primitiva que nos piden es: $f(x)=-x\cdot\cos x+2sen\,x+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{2}$

Halla la función $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$ que pasa por el punto $(3,-4\ln 5)$ y verifica $f'(x)=\dfrac{3x^2+4x+12}{x^2-4}$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 1. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{3x^2+4x+12}{x^2-4}\,dx=\int 3\,dx+\int \frac{4x+24}{x^2-4}\,dx=3x+\int \frac{4x+24}{x^2-4}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-4=0\Rightarrow x=2\ ;\ x=-2$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{4x+24}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=2\Rightarrow 32=4A\Rightarrow A=8$$
$$x=-2\Rightarrow 16=-4B\Rightarrow B=-4$$

Con lo cual:

$$f(x)=\int \frac{3x^2+4x+12}{x^2-4}\,dx=3x+\int \frac{4x+24}{x^2-4}\,dx=3x+\int \frac{8}{x-2}\,dx-\int \frac{4}{x+2}\,dx=$$
$$=3x+8\ln|x-2|-4\ln|x+2|+C$$

Calculamos la función que pasa por el punto $(3,-4\ln 5)$

$$f(x)=3x+8\ln|x-2|-4\ln|x+2|+C\Rightarrow -4\ln 5=9+8\ln|3-2|-4\ln|3+2|+C\Rightarrow C=-9$$

Luego, la función que nos piden es: $f(x)=3x+8\ln|x-2|-4\ln|x+2|-9$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(x^2-3x+5)\cdot e^x$. Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0,5)$.
MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 1. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x^2-3x+5;\ du=(2x-3)\ dx \\ dv=e^x\,dx;\ v=e^x \end{array}}$$

$$\int (x^2-3x+5)\cdot e^x\,dx=(x^2-3x+5)\cdot e^x-\int (2x-3)\cdot e^x\,dx$$

La volvemos a hacer por partes

$$\boxed{\begin{array}{l} u=2x-3;\ du=2\ dx \\ dv=e^x\,dx;\ v=e^x \end{array}}$$

$$\int (x^2-3x+5)\cdot e^x\,dx=(x^2-3x+5)\cdot e^x-\int (2x-3)\cdot e^x\,dx=(x^2-3x+5)\cdot e^x-(2x-3)\cdot e^x+2e^x+C=$$
$$=(x^2-5x+10)\cdot e^x+C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $(0,5)$.

$$F(x)=(x^2-5x+10)\cdot e^x+C\Rightarrow F(0)=5\Rightarrow 10+C=5\Rightarrow C=-5$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=(x^2-5x+10)\cdot e^x-5$

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -x^2 + 7$ y $g(x) = \left| x^2 - 1 \right|$.

a) Halla los puntos de intersección de *f* y *g*. Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.

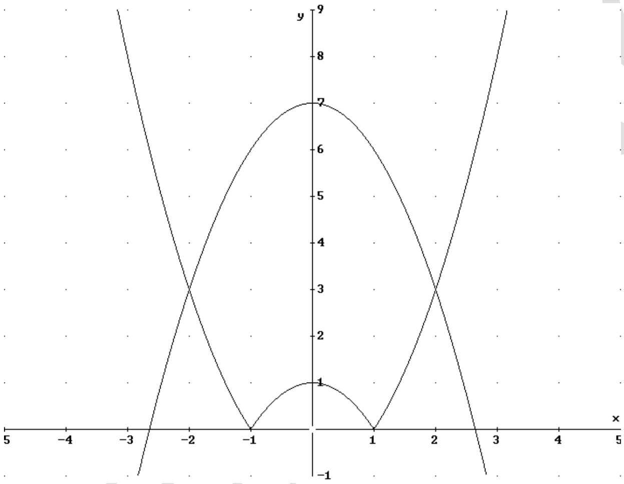
b) Calcula el área de dicho recinto.

MATEMÁTICAS II. 2024. JULIO. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos la función $f(x) = -x^2 + 7$ que es una parábola, haciendo una tabla de valores.

Abrimos la función $f(x) = \left| x^2 - 1 \right| = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x \le -1 \\ -x^2 + 1 & si \quad -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$ y hacemos el dibujo.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 1 \\ g(x) = -x^2 + 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Luego, los puntos de corte son el $(-2,3)$ y $(2,3)$

b) Calculamos el área que nos piden

$$A = 2\int_0^1 \left[(-x^2 + 7) - (-x^2 + 1) \right] dx + 2\int_1^2 \left[(-x^2 + 7) - (x^2 - 1) \right] dx =$$

$$= 2\int_0^1 6\, dx + 2\int_1^2 \left(-2x^2 + 8 \right) dx = 2\left[6x \right]_0^1 + 2\left[-\frac{2x^3}{3} + 8x \right]_1^2 = 2\left(6 - 0\right) + 2\left(-\frac{16}{3} + 16 + \frac{2}{3} - 8 \right) =$$

$$= 12 + \frac{20}{3} = \frac{56}{3} \quad u^2$$

EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

Halla $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x} \cdot \cos(x)\, dx$

MATEMÁTICAS II. 2024. JULIO. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral de $\displaystyle\int e^{x} \cdot \cos(x)\, dx$, que es una integral por partes cíclica

$$\int e^{x} \cdot \cos x\, dx = e^{x} sen\, x - \int e^{x} \cdot senx\, dx =$$
$$= e^{x} sen\, x - \left[-e^{x} \cos x + \int e^{x} \cos x dx \right] = e^{x} sen\, x + e^{x} \cos x - \int e^{x} \cos x dx$$

$$2\int e^{x} \cdot \cos x\, dx = e^{x} sen\, x + e^{x} \cos x \Rightarrow \int e^{x} \cdot \cos x\, dx = \frac{e^{x} sen\, x + e^{x} \cos x}{2} + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = e^{x};\ du = e^{x}\ dx \\ dv = \cos x\, dx;\ v = senx \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} u = e^{x};\ du = e^{x}\ dx \\ dv = sen\, x\, dx;\ v = -\cos x \end{array}}$$

Calculamos la integral que nos piden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x} \cdot \cos(x)\, dx = \left[\frac{e^{x} sen\, x + e^{x} \cos x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}} sen \frac{\pi}{2} + e^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2}}{2} \right) - \left(\frac{e^{0} sen\, 0 + e^{0} \cos 0}{2} \right) =$$

$$= \left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$$