EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2024

MATEMÁTICAS II

TEMA 6: BINOMIAL Y NORMAL

Se sabe que la probabilidad de que un dardo impacte en una diana es 0,4. Si se lanzan 9 dardos, determina:
a) Qué tipo de distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de dardos que dan en la diana.
b) La media y la desviación típica de esta distribución.
c) La probabilidad de que al menos 5 dardos impacten en la diana.
MATEMÁTICAS II. 2024 PONENCIA. EJERCICIO 17

R E S O L U C I Ó N

a) Es una binomial $B(9\,;0'4)$

La ley de probabilidad es: $p_k = p(x=k) = \binom{9}{k}\cdot 0'4^{\,k}\cdot 0'6^{\,9-k}$, siendo $k = 0,1,2......,9$

b)

La media es: $\mu = n\cdot p = 9\cdot 0'4 = 3'6$

La desviación típica es: $\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q} = \sqrt{9\cdot 0'4\cdot 0'6} = \sqrt{2'16} = 1'47$

c)

$$p(x\geq 5) = p(x=5)+p(x=6)+p(x=7)+p(x=8)+p(x=9) =$$

$$=\binom{9}{5}\cdot 0'4^{\,5}\cdot 0'6^{\,4}+\binom{9}{6}\cdot 0'4^{\,6}\cdot 0'6^{\,3}+\binom{9}{7}\cdot 0'4^{\,7}\cdot 0'6^{\,2}+\binom{9}{8}\cdot 0'4^{\,8}\cdot 0'6^{\,1}+\binom{9}{9}\cdot 0'4^{\,9}\cdot 0'6^{0} =$$

$$=126\cdot 0'4^{\,5}\cdot 0'6^{\,4}+84\cdot 0'4^{\,6}\cdot 0'6^{\,3}+36\cdot 0'4^{\,7}\cdot 0'6^{\,2}+9\cdot 0'4^{\,8}\cdot 0'6^{\,1}+1\cdot 0'4^{\,9}\cdot 1 = 0'2666 \Rightarrow 26'66\ \%$$

La probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga problemas dermatológicos es de 0,15. Dada una muestra de 50 personas,
a) ¿cuál es la probabilidad de que ninguna tenga problemas dermatológicos?
b) ¿cuál es la probabilidad de que al menos cuatro tengan problemas dermatológicos?
MATEMÁTICAS II. 2024 PONENCIA. EJERCICIO 18

R E S O L U C I Ó N

Es una binomial $B(50\,;0'15)$

La ley de probabilidad es: $p_k = p(x=k) = \binom{50}{k} \cdot 0'15^{\,k} \cdot 0'85^{\,50-k}$ siendo $k = 0,1,2,.......,50$

a) $p(x=0) = \binom{50}{0} \cdot 0'15^{\,0} \cdot 0'85^{\,50} = 2'96 \cdot 10^{-4}$

b)

$$p(x \geq 4) = 1 - p(x<4) = 1 - \left[p(x=0) + p(x=1) + p(x=2) + p(x=3) \right] =$$

$$= 1 - \left[\binom{50}{0} \cdot 0'15^{\,0} \cdot 0'85^{\,50} + \binom{50}{1} \cdot 0'15^{\,1} \cdot 0'85^{\,49} + \binom{50}{2} \cdot 0'15^{\,2} \cdot 0'85^{\,48} + \binom{50}{3} \cdot 0'15^{\,3} \cdot 0'85^{\,47} \right] =$$

$$= 1 - \left[0'85^{\,50} + 50 \cdot 0'15 \cdot 0'85^{\,49} + 1225 \cdot 0'15^{\,2} \cdot 0'85^{\,48} + 19600 \cdot 0'15^{\,3} \cdot 0'85^{\,47} \right] = 0'954$$

En un laboratorio de análisis clínicos, el 5% de las muestras que llegan no cumplen las condiciones requeridas para obtener resultados concluyentes en el análisis. Si se eligen 5 muestras, calcula:
a) La probabilidad de que de todas las muestras se puedan obtener resultados concluyentes.
b) La probabilidad de que de al menos dos no se obtengan resultados concluyentes.
c) La media y la desviación típica de la distribución.
MATEMÁTICAS II. 2024 PONENCIA. EJERCICIO 19

R E S O L U C I Ó N

Es una binomial $B(5\,;0'05)$

La ley de probabilidad es: $p_k = p(x=k) = \binom{5}{k} \cdot 0'05^{k} \cdot 0'95^{5-k}$ siendo $k = 0,1,2....,5$

a) $p(x=0) = \binom{5}{0} \cdot 0'05^{0} \cdot 0'95^{5} = 0'7738$

b)

$$p(x \geq 2) = 1 - p(x<2) = 1 - \left[p(x=0) + p(x=1)\right] = 1 - \left[\binom{5}{0} \cdot 0'05^{0} \cdot 0'95^{5} + \binom{5}{1} \cdot 0'05^{1} \cdot 0'95^{4}\right] =$$

$$= 1 - \left[0'95^{5} + 5 \cdot 0'05 \cdot 0'95^{4}\right] = 0'0226$$

c)

La media es: $\mu = n \cdot p = 5 \cdot 0'05 = 0'25$

La desviación típica es: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{5 \cdot 0'05 \cdot 0'95} = 0'4873$

En un centro de fertilidad, cada intento de inseminación in vitro para cualquier pareja tiene un porcentaje de éxito del 30 %. Esta semana han acudido 10 parejas para realizar el tratamiento. Nos preguntamos por el número de ellas que consiguen tener hijos.
a) ¿De qué tipo de distribución se trata? Calcular su media y su desviación.
b) ¿Qué probabilidad hay de que ninguna pareja conciba? ¿y de que alguna conciba?.
MATEMÁTICAS II. 2024 PONENCIA. EJERCICIO 20

R E S O L U C I Ó N

a) Es una binomial $B(10\ ;0'3)$

La ley de probabilidad es: $p_k = p(x=k) = \binom{10}{k} \cdot 0'3^k \cdot 0'7^{10-k}$, siendo $k = 0,1,2,....10$

La media es: $\mu = n \cdot p = 10 \cdot 0'3 = 3$

La desviación típica es: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{10 \cdot 0'3 \cdot 0'7} = 1'4491$

b)

$$p(x=0) = \binom{10}{0} \cdot 0'3^0 \cdot 0'7^{10} = 0'0282$$

$$p(x \geq 1) = 1 - p(x<1) = 1 - \left[p(x=0) \right] = 1 - 0'0282 = 0'9718$$

La variedad de naranjas Navel se suele dedicar a naranja de mesa por su tamaño y aspecto. Pero aquellas que no cumplen con los estándares de calidad exigidos, son utilizadas para hacer zumo. En una finca, una de cada tres naranjas de la variedad Navel recolectadas se destina a hacer zumo. Si se elige un cargamento de 90 naranjas de esa finca, calcula la probabilidad de que entre ellas haya por lo menos 30 que se destinen a hacer zumo.
MATEMÁTICAS II. 2024 PONENCIA. EJERCICIO 21

R E S O L U C I Ó N

Es una binomial $B\left(90\,;\frac{1}{3}\right)$

La ley de probabilidad es: $p_k = p(x=k) = \binom{90}{k}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{90-k}$, siendo $0,1,2.....90$

La probabilidad que nos piden es $p(x \geq 30)$ que es muy laborioso de calcular. Se puede hacer aplicando la aproximación de la binomial por la normal y la corrección por continuidad de Yates: "Si una variable aleatoria X sigue una binomial $B(n\,,p)$ que cumple: $n \geq 30\,;\, n\cdot p \geq 5 \;\; y \;\; n\cdot(1-p) \geq 5$, entonces, la variable aleatoria X se puede sustituir por otra variable aleatoria X': $N(\mu\,,\sigma)$ siendo $\mu = n\cdot p \;\; y\; \sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$"

En nuestro problema: $n = 90 \geq 30\,;\, n\cdot p = 90\cdot\frac{1}{3} = 30 \geq 5 \;\; y \;\; n\cdot(1-p) = 90\cdot\frac{2}{3} = 60 \geq 5$, por lo tanto,

X': $N(\mu\,,\sigma) = N\left(n\cdot p\,,\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}\right) = N\left(90\cdot\frac{1}{3}\,,\sqrt{90\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}\right) = N\left(30\,,\sqrt{20}\right)$"

Para calcular $p(X \geq 30)$, tomamos un intervalo de la recta que contenga a los números enteros mayores o iguales que 30, por ejemplo, $(29'5\,;+\infty)$

$$p(X \geq 30) = p(X' \geq 29'5) = p\left(z \geq \frac{29'5-30}{\sqrt{20}}\right) = p\left(z \geq -0'11\right) = p(z \leq 0'11) = 0'5438$$

La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 6 meses es del 20 %. Se pide:
a) Si en un acuario tenemos 15 peces de esta especie nacidos este mes, halla la probabilidad de que al menos 2 de ellos sigan vivos dentro de 6 meses.
b) Si en un tanque de una piscifactoría hay 300 peces de esta especie nacidos este mismo mes, halla la probabilidad de que al cabo de 6 meses hayan sobrevivido al menos 50 de ellos.
MATEMÁTICAS II. 2024 PONENCIA. EJERCICIO 22

R E S O L U C I Ó N

Es una binomial $B(15\,;0'2)$

La ley de probabilidad es: $p_k = p(x=k) = \binom{15}{k} \cdot 0'2^{\,k} \cdot 0'8^{\,15-k}$ siendo $k = 0,1,2.......15$

a)

$$p(x \geq 2) = 1 - p(x<2) = 1 - \left[p(x=0) + p(x=1) \right] = 1 - \left[\binom{15}{0} \cdot 0'2^{\,0} \cdot 0'8^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0'2^{\,1} \cdot 0'8^{\,14} \right] =$$

$$= 1 - \left[0'8^{\,15} + 15 \cdot 0'2 \cdot 0'8^{\,14} \right] = 0'8329$$

b) Es una binomial $B(300\,;0'2)$

La probabilidad que nos piden es $p(x \geq 50)$ que es muy laborioso de calcular. Se puede hacer aplicando la aproximación de la binomial por la normal y la corrección por continuidad de Yates: “Si una variable aleatoria X sigue una binomial $B(n\,,p)$ que cumple: $n \geq 30\,;\, n \cdot p \geq 5 \;\; y \;\; n \cdot (1-p) \geq 5$, entonces, la variable aleatoria X se puede sustituir por otra variable aleatoria X’: $N(\mu\,,\sigma)$ siendo $\mu = n \cdot p \;\; y \;\; \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ ”
En nuestro problema: $n = 300 \geq 30\,;\, n \cdot p = 300 \cdot 0'2 = 60 \geq 5 \;\; y \;\; n \cdot (1-p) = 300 \cdot 0'8 = 240 \geq 5$, por lo tanto,
X’: $N(\mu\,,\sigma) = N\left(n \cdot p\,, \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}\right) = N\left(300 \cdot 0'2\,, \sqrt{300 \cdot 0'2 \cdot 0'8}\right) = N\left(60\,, \sqrt{48}\right)$ ”

Para calcular $p(X \geq 50)$, tomamos un intervalo de la recta que contenga a los números enteros mayores o iguales que 50, por ejemplo, $(49'5\,;+\infty)$

$$p(X \geq 50) = p(X' \geq 49'5) = p\left(z \geq \frac{49'5-60}{\sqrt{48}} \right) = p\left(z \geq -1'52\right) = p(z \leq 1'52) = 0'9357$$

Un modelo de avión tiene capacidad para 260 pasajeros. Sin embargo, la compañía aérea a la que pertenece ha decidido vender más billetes que asientos hay en el avión. La probabilidad de que un pasajero se presente en el aeropuerto el día del vuelo es del 95 %. Si ese día la compañía ha vendido 280 billetes, ¿cuál es la probabilidad de que ese día se presenten 270 pasajeros?
MATEMÁTICAS II. 2024 PONENCIA. EJERCICIO 23

R E S O L U C I Ó N

Es una binomial $B(280\ ;0'95)$

La probabilidad que nos piden es $p(x \geq 270)$ que es muy laborioso de calcular. Se puede hacer aplicando la aproximación de la binomial por la normal y la corrección por continuidad de Yates: "Si una variable aleatoria X sigue una binomial $B(n\ ,p)$ que cumple: $n \geq 30$; $n \cdot p \geq 5$ y $n \cdot (1-p) \geq 5$, entonces, la variable aleatoria X se puede sustituir por otra variable aleatoria X': $N(\mu\ ,\sigma)$ siendo $\mu = n \cdot p$ y $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ "
En nuestro problema: $n = 280 \geq 30$; $n \cdot p = 280 \cdot 0'95 = 266 \geq 5$ y $n \cdot (1-p) = 280 \cdot 0'05 = 14 \geq 5$, por lo tanto,
X': $N(\mu\ ,\sigma) = N\left(n \cdot p\ ,\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}\right) = N\left(280 \cdot 0'95\ ,\sqrt{280 \cdot 0'95 \cdot 0'05}\right) = N\left(266\ ,\sqrt{13'3}\right)$"

Para calcular $p(X \geq 270)$, tomamos un intervalo de la recta que contenga a los números enteros mayores o iguales que 270, por ejemplo, $(269'5\ ;+\infty)$

$$p(X \geq 270) = p(X' \geq 269'5) = p\left(z \geq \frac{269'5-266}{\sqrt{13'3}}\right) = p\left(z \geq 0'96\right) = 1 - p(z \leq 0'96) = 1 - 0'8315 = 0'1685$$

Una fábrica de baterías para móviles ha detectado que una de sus máquinas produce un 10 % de baterías defectuosas. Si se han seleccionado al azar y de forma independiente 6 baterías:
a) Calcula la probabilidad de que exactamente cuatro baterías sean defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de que como máximo la mitad sean defectuosas?.
b) ¿Qué es más probable que ninguna sea defectuosa o que lo sean las seis?
MATEMÁTICAS II. 2024 PONENCIA. EJERCICIO 24

R E S O L U C I Ó N

Es una binomial $B(6\ ;0'1)$

La ley de probabilidad es: $p_k = p(x=k) = \binom{6}{k} \cdot 0'1^{\,k} \cdot 0'9^{\,6-k}$ siendo $k = 0,1,2.......6$

a) $p(x=4) = \binom{6}{4} \cdot 0'1^{\,4} \cdot 0'9^{\,2} = 0'0012$

$$p(x \le 3) = 1 - p(x>3) = 1 - \left[p(x=4) + p(x=5) + p(x=6) \right] =$$
$$= 1 - \left[\binom{6}{4} \cdot 0'1^{\,4} \cdot 0'9^{\,2} + \binom{6}{5} \cdot 0'1^{\,5} \cdot 0'9^{\,1} + \binom{6}{6} \cdot 0'1^{\,6} \cdot 0'9^{\,0} \right] =$$
$$= 1 - \left[1'215 \cdot 10^{-3} + 5'4 \cdot 10^{-5} + 1 \cdot 10^{-6} \right] = 0'9987$$

b) $p(x=0) = \binom{6}{0} \cdot 0'1^{\,0} \cdot 0'9^{\,6} = 0'5314$

$p(x=6) = \binom{6}{6} \cdot 0'1^{\,6} \cdot 0'9^{\,0} = 1 \cdot 10^{-6}$

Vemos que $p(x=0) > p(x=6)$, luego, es más probable que ninguna sea defectuosa

La altura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 4 cm.
a) Calcula la probabilidad de que un individuo elegido al azar mida más de 170 cm.
b) Calcula qué porcentaje de la población mide entre 170 y 185 cm.
c) Calcula la altura máxima que es superada por el 33 % de la población.
MATEMÁTICAS II. 2024 PONENCIA. EJERCICIO 25

R E S O L U C I Ó N

$N(175\ ;\ 4)$

a)

$$p(x>170)=p\left(z>\frac{170-175}{4}\right)=p\left(z>-1'25\right)=p\left(z\le 1'25\right)=0'8944\Rightarrow 89'44\%$$

b)

$$p(170<x<185)=p\left(\frac{170-175}{4}<z<\frac{185-175}{4}\right)=p(-1'25<z<2'5)=p(z<2'5)-p(z<-1'25)=$$
$$=p(z<2'5)-\left[1-p(z<1'25)\right]=0'9938-1+0'8944=0'8882\Rightarrow 88'82\%$$

c) Nos dicen que $p(x>k)=33\%=0'33$, luego:

$$p(x>k)=p\left(z>\frac{k-175}{4}\right)=0'33\Rightarrow 1-p\left(z\le\frac{k-175}{4}\right)=0'33\Rightarrow p\left(z\le\frac{k-175}{4}\right)=0'67\Rightarrow\frac{k-175}{4}=0'44$$
$$\Rightarrow k=175+4\cdot 0'44=176'76$$

La edad de los habitantes de cierta ciudad se distribuye normalmente, con una media de 40 años. Se sabe además que el 2,28 % de los habitantes de esa ciudad tiene más de 60 años.
a) Calcula la desviación típica de la distribución.
b) Si la edad de la población siguiera una distribución N(40,10), calcula el porcentaje de habitantes con menos de 35 años.
MATEMÁTICAS II. 2024 PONENCIA. EJERCICIO 26

R E S O L U C I Ó N

$N(40\ ;\ \sigma)$

a) Nos dicen que $p(x>60)=2'28\%=0'0228$, luego:

$$p(x>60)=p\left(z>\frac{60-40}{\sigma}\right)=p\left(z>\frac{20}{\sigma}\right)=1-p\left(z\leq\frac{20}{\sigma}\right)=0'0228=p\left(z\leq\frac{20}{\sigma}\right)=0'9772\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{20}{\sigma}=2\Rightarrow\sigma=\frac{20}{2}=10$$

b) Luego, la distribución es: $N(40\ ;\ 10)$

Calculamos lo que nos piden.

$$p(x<35)=p\left(z<\frac{35-40}{10}\right)=p(z<-0'5)=1-p(z<0'5)=1-0'6915=0'3085\Rightarrow 30'85\%$$

El peso de los estudiantes de determinada localidad sigue una distribución Normal de media 75 kg y varianza 36 kg^2.
a) Calcula el porcentaje de alumnado cuyo peso está comprendido entre 68 y 80 kg.
b) Si se sabe que uno de los estudiantes pesa más de 76 kg, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 80 kg?
MATEMÁTICAS II. 2024 PONENCIA. EJERCICIO 27

R E S O L U C I Ó N

$$N\left(75\ ;\ \sqrt{36}\right)=N\left(75\ ;\ 6\right)$$

a)
$$p(68<x<80)=p\left(\frac{68-75}{6}<z<\frac{80-75}{6}\right)=p(-1'17<z<0'83)=p(z<0'83)-p(z<-1'17)=$$
$$=p(z<0'83)-\left[1-p(z<1'17)\right]=0'7967-1+0'879=0'6757\Rightarrow 67'57\%$$

b)
$$p\left[(x>80)/(x>76)\right]=\frac{p(x>80)}{p(x>76)}=\frac{p\left(z>\frac{80-75}{6}\right)}{p\left(z>\frac{76-75}{6}\right)}=\frac{p\left(z>0'83\right)}{p\left(z>0'17\right)}=\frac{1-p\left(z\leq 0'83\right)}{1-p\left(z\leq 0'17\right)}=\frac{1-0'7967}{1-0'5675}=$$
$$=0'47\Rightarrow 47\%$$

El peso de las lubinas vendidas en una cadena de hipermercados sigue una distribución normal de media 6706 gramos. Sabiendo que el 20 % de las lubinas pesan más de 7386 gramos, calcula el porcentaje de lubinas que pesan entre 6 y 8 kg.
MATEMÁTICAS II. 2024 PONENCIA. EJERCICIO 28

R E S O L U C I Ó N

$N(6706 \,;\, \sigma)$

Nos dicen que $p(x > 7386) = 20\% = 0'2$, luego:

$$p(x > 7386) = p\left(z > \frac{7386 - 6706}{\sigma}\right) = p\left(z > \frac{680}{\sigma}\right) = 1 - p\left(z \leq \frac{680}{\sigma}\right) = 0'2 \Rightarrow p\left(z \leq \frac{680}{\sigma}\right) = 0'8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{680}{\sigma} = 0'845 \Rightarrow \sigma = \frac{680}{0'845} = 804'73$$

Luego, la distribución es: $N(6706 \,;\, 804'73)$
Calculamos lo que nos piden.

$$p(6000 < x < 8000) = p\left(\frac{6000 - 6706}{804'73} < z < \frac{8000 - 6706}{804'73}\right) = p(-0'88 < z < 1'61) =$$
$$= p(z < 1'61) - p(z < -0'88) = p(z < 1'61) - \left[1 - p(z < 0'88)\right] =$$
$$= 0'9663 - 1 + 0'8106 = 0'7769 \Rightarrow 77'69\%$$

El peso de una población de elefantes africanos macho sigue una distribución normal de media 6 toneladas y desviación típica 1500 kg.
a) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar pese exactamente 6 toneladas.
b) Calcule qué porcentaje de la población pesa entre 5 y 8 toneladas.
c) Calcule qué peso es superado por el 33 % de la población
MATEMÁTICAS II. 2024 PONENCIA. EJERCICIO 29

R E S O L U C I Ó N

$N(6000\ ;1500)$

a) $p(x=6000)=0$, ya que el área del segmento vertical que pasa por 6000 es cero.

b)

$$p(5000<x<8000)=p\left(\frac{5000-6000}{1500}<z<\frac{8000-6000}{1500}\right)=p(-0'67<z<1'33)=$$
$$=p(z<1'33)-p(z<-0'67)=p(z<1'33)-\left[1-p(z<0'67)\right]=$$
$$=0'9082-1+0'7486=0'6568\Rightarrow 65'68\%$$

c) Nos piden $p(x>k)=0'33$, luego:

$$p(x>k)=p\left(z>\frac{k-6000}{1500}\right)=1-p\left(z\leq\frac{k-6000}{1500}\right)=0'33\Rightarrow p\left(z\leq\frac{k-6000}{1500}\right)=0'67\Rightarrow\frac{k-6000}{1500}=0'44$$
$$\Rightarrow k=6000+1500\cdot 0'44=6600\ kg$$

Estudios realizados en un cierto país demuestran que el consumo de gasolina en autos compactos está normalmente distribuido, con una media de 6 litros por cada 100 km y una desviación estándar de 1, 2 litros por cada 100 km.
a) Calcula el porcentaje de autos compactos que gasta 7 o más litros cada 100 km.
b) Calcula el número máximo de litros por cada 100 km que debe consumir un auto compacto si el fabricante quiere que supere en economía de combustible al 95 % de los que hay actualmente en el mercado.
Nota: trabaja con cuatro cifras decimales
MATEMÁTICAS II. 2024. MODELO. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

Es una $N(6,1'2)$

a) $p(X \geq 7) = p\left(z > \dfrac{7-6}{1'2}\right) = p(z > 0'83) = 1 - p(z < 0'83) = 1 - 0'7967 = 0'2033$

Luego, el 20’33% de los coches gasta 7 o más litros cada 100 km

b) Tenemos que hallar $p(X \geq a) = 0'95$

$$p(X \geq a) = 0'95 \Rightarrow p\left(z \geq \frac{a-6}{1'2}\right) = 0'95 \Rightarrow p\left(z \leq -\frac{a-6}{1'2}\right) = 0'95 \Rightarrow -\frac{a-6}{1'2} = 1'645 \Rightarrow a = 4'026$$

Luego, si un auto compacto consume 4’026 litros por cada 100 km supera en economía de combustible al 95% de los que hay actualmente en el mercado.