

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3.2

emestrada

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}$ que cumple $|A| = -2$

a) Calcula $\begin{vmatrix} -3 & -4 & -\alpha \\ \alpha - 2 & \beta - \alpha & 1 - \beta \\ 8 & 4\alpha & 4\beta \end{vmatrix}$

b) Calcula $|A^{-1} \cdot (A^t)^2 \cdot A|$

MATEMÁTICAS II. 2026. JUNIO. EJERCICIO 3.2

RESOLUCIÓN

a)

$$\begin{vmatrix} -3 & -4 & -\alpha \\ \alpha - 2 & \beta - \alpha & 1 - \beta \\ 8 & 4\alpha & 4\beta \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} -3 & -4 & -\alpha \\ \alpha & \beta & 1 \\ 8 & 4\alpha & 4\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & -4 & -\alpha \\ -2 & -\alpha & -\beta \\ 8 & 4\alpha & 4\beta \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} -3 & -4 & -\alpha \\ \alpha & \beta & 1 \\ 8 & 4\alpha & 4\beta \end{vmatrix} + 0 =$$

$$\stackrel{(3)}{=} (-1) \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & \alpha \\ \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha & \beta \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} (-1) \cdot 4 \cdot (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-2) = 8$$

Propiedades aplicadas

(1) Si una línea de una determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes. En el primero ponemos el primer sumando y en el segundo el segundo sumando.

(2) Si un determinante tiene dos filas proporcionales ($-4 \cdot F_2 = F_3$), el determinante vale cero.

(3) Si una fila (columna) de un determinante está multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.

(4) Si intercambiamos dos filas o columnas de un determinante, el determinante cambia de signo.

b) Sabemos que: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. Además $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ y que $|A^t| = |A|$, luego:

$$|A^{-1} \cdot (A^t)^2 \cdot A| = |A^{-1}| \cdot |A^t|^2 \cdot |A| = \frac{1}{|A|} \cdot |A|^2 \cdot |A| = |A|^2 = (-2)^2 = 4$$